Das 1. Abzählbarkeitsaxiom und verwandte Begriffe

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Siegfried Pohl
aus Berlin

1977

Das 1. Abzählbarkeitsaxiom und verwandte Begriffe

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
des
Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Siegfried Pohl
aus Berlin

D A S 1. A B Z Ä H L B A R K E I T S A X I O M

U N D V E R W A N D T E B E G R I F F E

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

S i e g f r i e d P o h l

aus Berlin

1. Referent: Professor Dr. G. Preuß

2. Referent: Professor Dr. H. Pachale

Tag der mündlichen Prüfung: 12.12.77

Tag der Promotion:

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

Kapitel 1: Verallgemeinerungen des 1. Abzählbarkeitsaxioms

1.1. Konstruktion von Hüllenoperatoren zu vorgegebenem topologischen Raum 6

1.2. (A,f)-Räume 19

1.3. Charakterisierungen des 1. Abzählbarkeitsaxioms . . 27

Kapitel 2: Verallgemeinerungen der Folgenkompaktheit

2.1. A-sternfolgenkompakte und A-δ-sternfolgenkompakte Räume 35

2.2. Sternfolgenkompaktheit und verwandte Begriffe . . . 42

2.3. Stetigkeit und Folgenstetigkeit 46

Kapitel 3: Die Kategorie der (A)-topologischen Räume

3.1. Allgemeines 49

3.2. *-kompakte (A)-topologische Räume 57

3.3. Abzählbar kompakte (A)-topologische Räume 61

Kapitel 4: Abzählbare Kompaktheit und verwandte Begriffe

4.1. Schwach abzählbar kompakte Räume 65

4.2. Schwach folgenkompakte Räume 70

4.3. Filterkompakte Räume 73

Literaturverzeichnis 87

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549607_0006

Einleitung

In der allgemeinen Topologie gibt es viele Probleme, bei denen das 1. Abzählbarkeitsaxiom eine entscheidende Rolle spielt. Beispielsweise können die Fragen:

(1) Wann ist jede folgenstetige Abbildung auf X stetig ?

(2) Wann ist ein T_2-Raum kompakt erzeugter Raum ?

(3) Wann sind abzählbare Kompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent ?

(4) Wann ist das abgeschlossene Bild eines metrischen Raumes metrisierbar ?

dann positiv beantwortet werden, wenn das 1. Abzählbarkeitsaxiom gilt.
Die unterschiedliche Art dieser Probleme gibt Anlaß zu einer Reihe von Verallgemeinerungen des 1. Abzählbarkeitsaxioms. Wir wollen hier zwei erwähnen, die schon in der Mehrzahl der Fälle zu befriedigenden Resultaten führen: die folgenbestimmten Räume ([Fra]) und die von Arhangel'skii [Ar] eingeführten 'Räume von punktweise abzählbarem Typ'. Die folgenbestimmten Räume, die charakterisiert sind als Quotienten metrisierbarer Räume, beantworten die Fragen (1) - (3); die Räume von punktweise abzählbarem Typ, die klassifiziert sind als offene Bilder parakompakter M-Räume, lösen die Probleme (2) und (4). Einen umfassenden Überblick über alle bisher bekannten Verallgemeinerungen des 1. Abzählbarkeitsaxioms und deren Beziehungen untereinander hat Siwiec in seiner 1975 veröffentlichten Arbeit "Generalizations of the first axiom of countability" [Si] gegeben.
Wir beschäftigen uns in der vorliegenden Arbeit mit der Bedeutung des 1. Abzählbarkeitsaxioms für die Äquivalenz von abzählbarer Kompaktheit und Folgenkompaktheit. Insbesondere interessiert uns die Frage, wann zu einer Verallgemeinerung E des 1. Abzählbarkeitsaxioms eine Raumklasse $\underline{B}_E$ zwischen den folgenkompakten und den abzählbar kompakten Räumen gefunden werden kann, so daß jeder abzählbar kompakte Raum, der die Eigenschaft E besitzt, zu $\underline{B}_E$ gehört. Die Beantwortung dieser Frage für einige spezielle, von uns eingeführte Verallgemeinerungen des 1. Abzählbarkeitsaxioms bildet

den Kern dieser Arbeit.

Im ersten Kapitel geben wir eine Methode an, die es ermöglicht, das 1. Abzählbarkeitsaxiom 'schrittweise' zu verallgemeinern. Dazu schwächen wir die lokale Aussage des 1. Abzählbarkeitsaxioms ab und verknüpfen sie mit einer globalen Forderung. Wir verlangen nicht mehr, daß jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, sondern nur, daß es zu jedem $x \in X$ abzählbar viele Umgebungen gibt mit der Eigenschaft, daß zu jeder offenen Überdeckung von X ein 'Deckel' existiert, der eine dieser Umgebungen - bis auf eine abgeschlossene Obermenge von x - enthält. Auf diese Weise lassen sich Trennungs- und Regularitätseigenschaften vom 1. Abzählbarkeitsaxiom 'abspalten', und es können Charakterisierungen des 1. Abzählbarkeitsaxioms für die Klassen der T_2- und der T_3-Räume vorgenommen werden.

In Kapitel 2 befassen wir uns mit Verallgemeinerungen der Folgenkompaktheit. Wir betrachten zwei Folgenbegriffe: Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum X heißt Sternfolge (δ-Sternfolge), wenn zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von X ein $n_{\mathcal{U}} \in \mathbb{N}$ existiert, so daß in $St(x_{n_{\mathcal{U}}}, \mathcal{U})$ ($\bigcap_{n \geq n_{\mathcal{U}}} St(x_n, \mathcal{U})$) alle Folgenglieder x_m mit $m \geq n_{\mathcal{U}}$ liegen. Analog zur Definition der Folgenkompaktheit nennen wir einen topologischen Raum X sternfolgenkompakt (δ-sternfolgenkompakt), wenn jede Folge in X eine Stern-Teilfolge (δ-Stern-Teilfolge) besitzt. Weil jede konvergente Folge auch δ-Sternfolge und jede δ-Sternfolge eine Sternfolge ist, ist jeder folgenkompakte Raum δ-sternfolgenkompakt und jeder δ-sternfolgenkompakte Raum sternfolgenkompakt. Indem wir den Begriff der Sternfolge (δ-Sternfolge) nicht für alle Überdeckungen zugleich, sondern für endliche-, abzählbare- und beliebige Überdeckungen getrennt definieren, erhalten wir verschiedene Verallgemeinerungen der Folgenkompaktheit, die in speziellen Klassen topologischer Räume (wie den T_2-Lindelöf-Räumen oder den T_{2a}-Räumen) zu Charakterisierungen der Folgenkompaktheit führen. Da weder die sternfolgenkompakten noch die δ-sternfolgenkompakten Räume eine Unterklasse der abzähl-

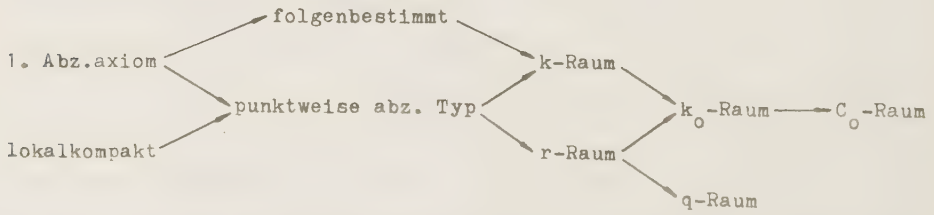
bar kompakten Räume bilden, müssen wir diese Raumklassen noch geeignet modifizieren. Dazu konstruieren wir (in Kapitel 3) eine Oberklasse der abzählbar kompakten Räume und zeigen (in Kapitel 4), daß der 'Schnitt' dieser Klasse mit der Klasse der ó-sternfolgenkompakten Räume eine Zwischenklasse der gesuchten Art ($\underline{B}_E$) liefert.

Bei dem Versuch, Sternfolgenkompaktheit strukturell zu untersuchen, zeigt sich, daß der Begriff Sternfolge zu stark gewählt ist. Wir schwächen diesen Begriff dadurch ab, daß wir nur solche Überdeckungen $(O_i)_{i \in I}$ von X berücksichtigen, für die $|I| = |X|$ gilt. Da jede solche Überdeckung darstellbar ist in der Form $(k(x))_{x \in X}$ für eine geeignete Abbildung $k: X \longrightarrow \underline{X}$, beschäftigen wir uns in Kapitel 3 mit Eigenschaften von Teilmengen $\underline{A}$ von $\underline{X}^X$. Dazu gehen wir von der Kategorie Top der topologischen Räume über zu einer allgemeineren Raumklasse, zur Kategorie (A)-Top der (A)-topologischen Räume. Objekte sind Tripel $(X,\underline{X},\underline{A})$, wobei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum ist und $\underline{A}$ eine Teilmenge von $\underline{X}^X$, die die Abbildungen $k_\emptyset$ ($x \longmapsto \emptyset$ für alle $x \in X$) und k_X ($x \longmapsto X$ für alle $x \in X$) enthält. Morphismen $h \in \left[(X,\underline{X},\underline{A}),(Y,\underline{Y},\underline{B})\right]_{(A)\text{-}Top}$ sind Abbildungen $h: X \longrightarrow Y$ derart, daß $h: (X,\underline{X}) \longrightarrow (Y,\underline{Y})$ stetig ist und $h^{-1} \circ g \circ h \in \underline{A}$ gilt für alle $g \in \underline{B}$. Die Kategorie (A)-Top ist eine topologische Kategorie. Der Vorteil in der Betrachtung (A)-topologischer Räume liegt darin, daß globale und lokale topologische Eigenschaften in (A)-Top gemeinsam behandelt werden können; denn es lassen sich nicht nur Überdeckungen eines topologischen Raumes $(X,\underline{X})$ als Abbildungen von X in $\underline{X}$ interpretieren, sondern auch Umgebungen (und zwar als konstante Abbildungen). Die Kategorie Top ist 'Durchschnitt' von einer bicoreflektiven und einer bireflektiven Unterkategorie von (A)-Top. Begriffe wie abzählbar kompakt oder normal, die in Top nicht einmal abgeschlossen bez. Bildung von endlichen Produkten sind, lassen sich auf (A)-Top produktinvariant übertragen.

Um die oben erwähnte Oberklasse der abzählbar kompakten Räume konstruieren zu können, führen wir einen Kompaktheitsbegriff für (A)-topologische

Räume ein: Ein (A)-topologischer Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$ heißt α-kompakt, wenn zu jedem $k \in \underline{A}$ und jedem $x \in X$ eine endliche Teilmenge $G = G(k,x)$ von X existiert mit $\overline{k(x)} \subset \bigcup_{x' \in G} k(x')$. Dieser Begriff ist eine Produktinvariante der Kategorie (A)-Top. Eine geeignete Einschränkung auf Top, die wir im ersten Abschnitt des 4. Kapitels vornehmen, liefert die gesuchte Oberklasse. Die Objekte X dieser Klasse nennen wir schwach abzählbar kompakte Räume. Sie sind gekennzeichnet dadurch, daß für jede abzählbare offene Überdeckung von X der Abschluß eines jeden einzelnen 'Deckels' in der Vereinigung von endlich vielen 'Deckeln' enthalten ist. Die Begriffe abzählbar kompakt und schwach abzählbar kompakt erweisen sich in der Klasse der zusammenhängenden T_1-Räume als äquivalent. Schwach abzählbar kompakte Räume, die zugleich δ-sternfolgenkompakt sind, nennen wir schwach folgenkompakt. Es ist jeder folgenkompakte Raum schwach folgenkompakt und jeder schwach folgenkompakte Raum abzählbar kompakt. In der Klasse der R_{1a}-Räume (Marny [Ma]) stimmen die Begriffe folgenkompakt und schwach folgenkompakt überein.

Im letzten Abschnitt von Kapitel 4 behandeln wir eine der stärksten Verallgemeinerungen des 1. Abzählbarkeitsaxioms - die C_o-Eigenschaft von Tanaka [T]. Das nachfolgende Diagramm zeigt, wie dieser Begriff in die Reihe der anderen Verallgemeinerungen eingeordnet ist.



Zur Konstruktion der uns interessierenden Zwischenklasse $\underline{B_{C_o}}$ kombinieren wir die Begriffe folgenkompakt und quasikompakt. Wir nennen einen topologischen Raum X filterkompakt, wenn jede Folge in X eine Teilfolge besitzt derart, daß zu jeder offenen Überdeckung von X endlich viele 'Dek-

kel' existieren, die fast alle Glieder der Teilfolge enthalten. Die filterkompakten Räume bilden eine echte Zwischenklasse zwischen den folgenkompakten und den abzählbar kompakten Räumen; sie bilden außerdem eine Oberklasse der quasikompakten Räume. Ferner ist die Klasse der ultrakompakten Räume (Bernstein [Be]) in der Klasse der filterkompakten Räume enthalten. Es gelten folgende Produkteigenschaften:

(1) Das Produkt eines filterkompakten Raumes mit einem abzählbar kompakten Raum ist abzählbar kompakt.

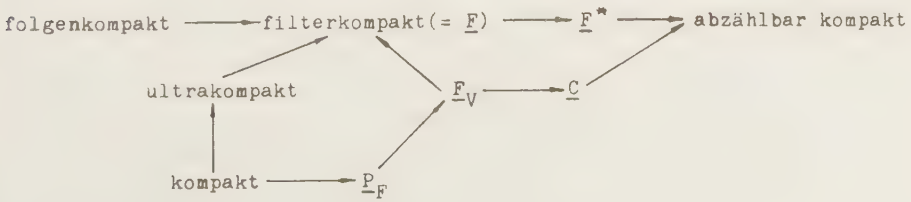
(2) Das Produkt eines folgenkompakten Raumes mit einem filterkompakten Raum ist filterkompakt.

(3) Das Produkt eines quasikompakten Raumes mit einem filterkompakten Raum ist filterkompakt.

Aus Eigenschaft (1) folgt, daß die vollständig regulären filterkompakten Räume eine Zwischenklasse $\underline{F}_V$ zwischen den von Frolik [Fro1], [Fro2] eingeführten Klassen $\underline{P}_F$ und $\underline{C}$ bilden. Eigenschaft (3) und die Tatsache, daß Filterkompaktheit erblich ist auf abgeschlossene Unterräume, implizieren, daß $\underline{F}_V$ eine 'left fitting Kategorie' ([He2]) ist.

Fügt man zur Klasse $\underline{F}$ der filterkompakten Räume alle abgeschlossenen Unterräume von endlichen Produkten von filterkompakten Räumen hinzu, so erhält man eine Zwischenklasse $\underline{F}^*$ zwischen den folgenkompakten und den abzählbar kompakten Räumen, die abgeschlossen bez. Bildung von endlichen Produkten ist und die Klasse der quasikompakten Räume umfaßt.

Das nachfolgende Diagramm veranschaulicht noch einmal die Zusammenhänge zwischen den genannten Raumklassen.



Kapitel 1: Verallgemeinerungen des 1. Abzählbarkeitsaxioms

Die Aussage des 1. Abzählbarkeitsaxioms, daß jeder Punkt x des topologischen Raumes X abzählbar viele Umgebungen U_n ($n \in \mathbb{N}$) besitzt derart, daß zu jeder weiteren Umgebung U von x ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $U_n \subset U$, ist von lokaler Natur. Eine mögliche Verallgemeinerung besteht darin, die Existenz abzählbar vieler Umgebungen von x zu fordern in der Art, daß zu jeder offenen Überdekkung von X ein 'Deckel' existiert, der eine dieser Umgebungen enthält. Das ist eine Kombination einer lokalen mit einer globalen Bedingung. Eine zusätzliche Verallgemeinerung erhält man, wenn man verlangt, daß nur $U_n \setminus \{x\}$ (oder sogar nur $U_n \setminus \overline{\{x\}}$) in einem 'Deckel' enthalten zu sein braucht.
Das Konzept, von einer Umgebung U eines Punktes x den Punkt x (oder auch $\overline{\{x\}}$) 'abzuziehen', wird in Abschnitt 1.1. allgemein studiert. In Abschnitt 1.2. axiomatisieren und untersuchen wir - aufbauend auf 1.1. und einer allgemeinen Formulierung der genannten globalen Bedingung - den oben beschriebenen Typ von Verallgemeinerungen des 1. Abzählbarkeitsaxioms. Abschnitt 1.3. enthält Charakterisierungen des 1. Abzählbarkeitsaxioms für spezielle Raumklassen, wie den T_2- oder den T_3-Räumen. Wir benutzen dazu die von uns eingeführten Verallgemeinerungen des 1. Abzählbarkeitsaxioms.

1.1. Konstruktion von Hüllenoperatoren zu vorgegebenem topologischen Raum

1.1.1. Definitionen: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum und f eine Abbildung von X in die Potenzmenge 2^X von X.

a) $r(f) := \{x \mid x \in X \text{ mit } x \in f(x)\}$.

b) f heißt reflexiv, wenn gilt: $r(f) = X$.

c) f heißt total unreflexiv, wenn gilt: $r(f) = \emptyset$.

d) f heißt transitiv, wenn gilt: $(f \circ f)(x) \subset f(x)$ für alle $x \in X$
$((f \circ f)(x) := \{y \mid y \in X$, es existiert $z \in f(x)$ mit $y \in f(z)\}$).

e) Für $A \subset X$ sei: $A_f := \{x \mid x \in X \text{ mit } (U \cap f(x)) \cap A \neq \emptyset$ für alle $U \in \underline{U}(x)\}$.

1.1.2. Lemma: $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum, $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung. A, B seien Teilmengen von X. Dann gilt:

1) $A_f \subset \bar{A}$.
2) $A_f \cap (X \setminus r(f)) \subset A'$.
3) $A \subset B \Longrightarrow A_f \subset B_f$.
4) $(A \cup B)_f = A_f \cup B_f$.

Beweis: Zu (1): $x \in A_f$ und $U \in \underline{U}(x)$ implizieren $U \cap A \supset (U \cap f(x)) \cap A \neq \emptyset$.
Zu (2): Ist $x \in A_f \cap (X \setminus r(f))$ und U eine Umgebung von x, so gilt $(U \setminus \{x\}) \cap A \supset (U \cap f(x)) \cap A \neq \emptyset$, also $x \in A'$.
Zu (3): trivial.
Zu (4): "$\supset$" folgt aus (3).
"$\subset$" (indirekt): Angenommen, es gibt $x \in (A \cup B)_f$ mit $x \notin A_f \cup B_f$. Dann existieren Umgebungen U_1, $U_2 \in \underline{U}(x)$ mit $(U_1 \cap f(x)) \cap A = \emptyset = (U_2 \cap f(x)) \cap B$. Wir setzen $U := U_1 \cap U_2$. Dann folgt $(U \cap f(x)) \cap (A \cup B) = \emptyset$. Widerspruch zu $x \in (A \cup B)_f$.

1.1.3. Lemma: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum und $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung. Dann gilt:

1) $r(f) \subset r(f)_f$.
2) f transitiv $\Longrightarrow (A_f)_f \subset A_f$ für alle $A \in 2^X$.
3) f total unreflexiv $\Longrightarrow A_f \subset A'$ für alle $A \in 2^X$.

Beweis: Zu (1): Für $x \in r(f)$ und $U \in \underline{U}(x)$ gilt $x \in (U \cap f(x)) \cap r(f) \neq \emptyset$.
Zu (2): Sei $x \in (A_f)_f$. Ist $U \in \mathring{\underline{U}}(x)$, so existiert ein $y \in (U \cap f(x)) \cap A_f \neq \emptyset$. Wegen $U \in \mathring{\underline{U}}(y)$ und $y \in A_f$ finden wir ein $z \in (U \cap f(y)) \cap A \neq \emptyset$. Aus $y \in f(x)$ und $z \in f(y)$ folgt, da f transitiv ist, $z \in f(x)$, also $z \in (U \cap f(x)) \cap A \neq \emptyset$. qed.
Zu (3): Wegen $r(f) = \emptyset$ trivial nach 1.1.2.(2).

1.1.4. Lemma: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum und $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung mit $f[X] \subset \underline{X}$. Dann gilt:

1) $A_f \cap r(f) = \bar{A} \cap r(f)$.

2) f reflexiv $\Longleftrightarrow A_f = \overline{A}$ für alle $A \in 2^X$.

3) $(A_f)_f \subset A_f$ für alle $A \in 2^X$.

4) Für $x \in X$ sind äquivalent: (a) $x \in r(f)$,

(b) $\underline{U}(x) = \underline{U}_f(x) := (\{U \cap f(x) \;/\; U \in \underline{U}(x)\})$.

5) Ist $\{x\} \notin \underline{X}$ für alle $x \in X$, dann gilt $A_f \subset A'$ für alle $A \in \underline{X}$.

Beweis: Zu (1): "$\subset$" klar nach 1.1.2.(1).

"$\supset$" Es sei $x \in \overline{A} \cap r(f)$ und $U \in \underline{U}(x)$. Dann gilt $x \in U \cap f(x) \in \underline{U}(x)$, woraus wegen $x \in \overline{A}$ $(U \cap f(x)) \cap A \neq \emptyset$ folgt. Also gilt $x \in A_f$.

Zu (2): "$\Longrightarrow$": Wegen $r(f) = X$ trivial nach (1).

"$\Longleftarrow$" (indirekt): Ist $x \in X \setminus f(x)$, dann gilt für die Menge $A := X \setminus f(x)$ $x \in A = \overline{A} = A_f$. Wegen $X \in \underline{U}(x)$ folgt $(U \cap f(x)) \cap (X \setminus f(x) \neq \emptyset$. Widerspruch!

Zu (3)(indirekt): Angenommen, es existiert ein $x \in (A_f)_f$ mit $x \notin A_f$. Dann gibt es eine Umgebung $U \in \underline{U}(x)$ mit $(U \cap f(x)) \cap A = \emptyset$. Wegen $x \in (A_f)_f$ existiert ein $y \in (U \cap f(x)) \cap A_f \neq \emptyset$. Weil $(U \cap f(x))$ eine Umgebung von y ist, gilt $((U \cap f(x)) \cap f(y) \cap A \neq \emptyset$. Es folgt $(U \cap f(x)) \cap A \neq \emptyset$. Widerspruch!

Zu (4): (a) $\Longrightarrow$ (b): Ist $U \in \underline{U}(x)$, dann gilt wegen $U \supset U \cap f(x)$ auch $U \in \underline{U}_f(x)$. Ist umgekehrt $U \cap f(x) \in \underline{U}_f(x)$, so gilt wegen $x \in f(x) \in \underline{X}$ auch $U \cap f(x) \in \underline{U}(x)$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): $f(x) = X \cap f(x) \in \underline{U}_f(x) = \underline{U}(x)$ impliziert $x \in f(x)$, also $x \in r(f)$.

Zu (5): Sei $A \in \underline{X}$ und $x \in A_f$. Ist U eine Umgebung von x, so existiert ein $y \in (U \cap f(x)) \cap A \neq \emptyset$. Es folgt $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ (Wäre $(U \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$, so müßte $\{x\} = (U \cap f(x)) \cap A \in \underline{X}$ gelten!).

1.1.5. Satz: Es sei $(X, \underline{X})$ ein topologischer Raum und $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung. Ist f transitiv oder gilt $f[X] \subset \underline{X}$, dann ist

$$cl_f: 2^X \longrightarrow 2^X \quad \text{definiert durch}$$

$$A \longmapsto A \cup A_f$$

ein Hüllenoperator. Für die von cl_f induzierte Topologie $\underline{X}_f := \{X \setminus cl_f A \;/\; A \subset X\}$ gilt: $\underline{X} \subset \underline{X}_f$.

Beweis: (K.1) Wegen $\emptyset_f = \emptyset$ gilt $cl_f \emptyset = \emptyset$.

(K.2) $A \subset A \cup A_f = cl_f A$.

(K.3) $cl_f(cl_f A) = cl_f(A \cup A_f) = A \cup A_f \cup (A \cup A_f) = A \cup A_f \cup A_f \cup (A_f)_f = A \cup A_f$
$= cl_f A$. (1.1.3.(2) und 1.1.4.(3))

(K.4) $cl_f(A \cup B) = A \cup B \cup (A \cup B)_f = A \cup B \cup A_f \cup B_f = cl_f A \cup cl_f B$.

Zu zeigen bleibt $\underline{X} \subset \underline{X}_f$: Sei $O \in \underline{X}$. Beh.: $O = X \setminus cl_f(X \setminus O)$.

Bew.: "$\supset$" trivial.

"$\subset$" Ist $x \in O$, dann ist O eine Umgebung von x, und es gilt $x \notin (X \setminus O)_f$ (denn $(O \cap f(x)) \cap (X \setminus O) = \emptyset$). Es folgt $x \notin (X \setminus O) \cup (X \setminus O)_f = cl_f(X \setminus O)$.

1.1.6. Lemma: Bei den gleichen Voraussetzungen wie in 1.1.5. gilt:

1) Für $O \subset X$ sind äquivalent:

   (a) $O \in \underline{X}_f$,

   (b) Zu jedem $x \in O$ existiert eine Umgebung U (bez. $\underline{X}$) mit $U \cap f(x) \subset O$.

2) $f[X] \subset \underline{X}_f$.

3) A_f ist abgeschlossen in $(X, \underline{X}_f)$ für alle $A \in 2^X$.

4) Für den Fall $f[X] \subset \underline{X}$ gilt:

   (a) f reflexiv $\Longrightarrow \underline{X} = \underline{X}_f$.

   (b) Die von $(X, \underline{X})$ und $(X, \underline{X}_f)$ auf $r(f)$ induzierten Topologien stimmen überein.

Beweis: Zu (1): $O \in \underline{X}_f \iff X \setminus O = cl_f(X \setminus O) = (X \setminus O) \cup (X \setminus O)_f$

$\iff (X \setminus O)_f \subset X \setminus O$

$\iff O \cap (X \setminus O)_f = \emptyset$

(a) $\Longrightarrow$ (b): Ist $x \in O$, dann gilt $x \notin (X \setminus O)_f$. Also finden wir eine Umgebung $U \in \underline{U}(x)$ mit $(U \cap f(x)) \cap (X \setminus O) = \emptyset$. Es folgt $U \cap f(x) \subset O$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) (indirekt): Ist (a) nicht erfüllt, so existiert ein $x \in O \cap (X \setminus O)_f$. Dann gilt für jedes $U \in \underline{U}(x)$ $(U \cap f(x)) \cap (X \setminus O) \neq \emptyset$, d.h. (b) ist nicht erfüllt.

Zu (2): Für eine transitive Abbildung $f: X \longrightarrow 2^X$ ist $f[X] \subset \underline{X}_f$ zu zeigen.

Sei $x \in X$. Beh.: $(X \setminus f(x))_f \subset X \setminus f(x)$.

Bew.: Ist $y \in (X \setminus f(x))_f$, so existiert zu der Umgebung $X \in \underline{U}(y)$ ein Punkt $z \in (X \cap f(y)) \cap (X \setminus f(x)) \neq \emptyset$. Aus $z \in f(y)$ und $z \notin f(x)$ folgt, da f transitiv

ist, $y \in f(x)$. qed.

Es folgt $cl_f(X \setminus f(x)) = X \setminus f(x)$, also $f(x) \in \underline{X}_f$.

Zu (3): $cl_f(A_f) = A_f \cup (A_f)_f = A_f$ (1.1.3.(2) bzw. 1.1.4.(3)).

Zu (4): (a): trivial unter Verwendung von 1.1.4.(2).

(b): Zu zeigen: $\underline{X}_{r(f)} = (\underline{X}_f)_{r(f)}$.

"$\subset$" klar wegen $\underline{X} \subset \underline{X}_f$.

"$\supset$" Sei $O \in \underline{X}_f$. Beh.: $O \cap r(f) = O^{o(\underline{X})} \cap r(f)$.

Bew.: "$\supset$" trivial. "$\subset$" Sei $x \in O \cap r(f)$, also $x \in O \cap f(x)$. $O \in \underline{X}_f$ impliziert nach (1) die Existenz einer Umgebung U von x (bez. $\underline{X}$) mit $U \cap f(x) \subset O$. Hieraus folgt $x \in U^o \cap (f(x))^o = (U \cap f(x))^o \subset O^o$. qed.

1.1.7. Bemerkungen: (1) Bei Betrachtung der Äquivalenz 1.1.6.(1) stellt man fest, daß die Abbildung $\underline{U}_f$: $X \longrightarrow (2^X)^X$ (definiert wie in 1.1.4.(4b)) die Topologie $\underline{X}_f$ induziert in der gleichen Weise, wie ein vollständiges Umgebungssystem eine Topologie induziert. Das Umgebungssystem eines Punktes $x \in X$ bez. $(X,\underline{X}_f)$ ist im allgemeinen aber nur ein Teilsystem von $\underline{U}_f(x)$. ($U \cap f(x)$ braucht nicht einmal den Punkt x zu enthalten!)

(2) Wegen $f[X] \subset \underline{X}_f$ ist der Operator cl_f auch bez. $(X,\underline{X}_f)$ ein Hüllenoperator. Die nochmalige Anwendung liefert aber keine neue Topologie auf X; es gilt: $(\underline{X}_f)_f = \underline{X}_f$.

1.1.8. Beispiele: Es sei $(X,\underline{X})$ ein mindestens zweipunktiger Raum.

(1) Ist $(X,\underline{X})$ diskret, dann ist f: $X \longrightarrow \underline{X}$ definiert durch

$$x \longmapsto X \setminus \{x\}$$

eine total unreflexive Abbildung, für die $\underline{X} = \underline{X}_f$ gilt. (d.h. im allgemeinen gilt in 1.1.6.(4a) keine Rückrichtung)

(2) Ist $(X,\underline{X})$ nicht diskret, dann wird durch $f(x) := \emptyset$ für alle $x \in X$ eine Abbildung von X in $\underline{X}$ definiert, die total unreflexiv und transitiv ist und für die $\underline{X} \subsetneq \underline{X}_f$ ($= 2^X$) gilt.

(3) Ist $(X,\underline{X})$ indiskret und f eine Abbildung von X in $\underline{X}$, so ist $(X,\underline{X}_f)$ entweder ebenfalls indiskret ($f = f_X$) oder diskret ($f = f_\emptyset$).

1.1.9. Satz: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum und $f: X \longrightarrow \underline{X}$ eine Abbildung. Ist f total unreflexiv, dann ist $(X,\underline{X}_f)$ ein T_D-Raum.

Beweis: Sei $A \subset X$. Wir müssen $A' = cl_f A'$ nachweisen. (Mit A' bezeichnen wir hier die derivierte Menge von A bez. $(X,\underline{X}_f)$.)
Es reicht $(A')_f \subset A'$ zu zeigen.
Angenommen, es existiert $x \in (A')_f \setminus A' \neq \emptyset$. Dann gibt es eine Menge $O \in \underline{X}_f$ mit $x \in O$ und $(O \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$. Nach 1.1.6.(1) besitzt x eine offene Umgebung U (bez. $\underline{X}$) mit $U \cap f(x) \subset O$. Weil x ein Punkt aus $(A')_f$ ist, existiert $y \in (U \cap f(x)) \cap A \neq \emptyset$. Wegen $y \in U \cap f(x) \in \underline{X} \subset \underline{X}_f$ folgt $((U \cap f(x)) \setminus \{y\}) \cap A \neq \emptyset$. Da $((U \cap f(x)) \setminus \{x\}) \cap A$ leer ist, muß $\{x\} = ((U \cap f(x)) \setminus \{y\}) \cap A$ gelten. Es folgt mit $x \in f(x)$ ein Widerspruch, denn f ist nach Voraussetzung total unreflexiv.

1.1.10. Definitionen: $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum, f,g seien Abbildungen von X in 2^X.

1) $f \leq g :\Longleftrightarrow f(x) \subset g(x)$ für alle $x \in X$.
2) $cl_f \prec cl_g :\Longleftrightarrow cl_f A \subset cl_g A$ für alle $A \in 2^X$.
3) $f \pi g :\Longleftrightarrow (r(f))^o = (r(g))^o$.

1.1.11. Bemerkungen: (1) "$\leq$" und "$\prec$" sind Ordnungsrelationen auf $(2^X)^X$ bzw. $(2^X)^{2^X}$; π ist eine Äquivalenzrelation auf $(2^X)^X$.

(2) $f \leq g \Longrightarrow cl_f \prec cl_g \Longrightarrow \underline{X}_g \subset \underline{X}_f$ (falls $\underline{X}_g$ und $\underline{X}_f$ definiert sind.)

(3) Gilt $f \pi g$ und ist f reflexiv, so ist g reflexiv.

(4) Für jeden topologischen Raum $(X,\underline{X})$ ist die Abbildung

$$k: \frac{X^X}{\pi} \longrightarrow \underline{X}, \quad [f] \longmapsto r(f)^o$$

eine Bijektion. (Daß k wohldefiniert und injektiv ist, ist trivial. Definieren wir für alle $O \in \underline{X}$ die Abbildung f_O von X in $\underline{X}$ durch: $f_O(x) = O$ für $x \in O$ und $f_O(x) = \emptyset$ für $x \notin O$, so gilt $k([f_O]) = r(f_O)^o = O$. Also ist k surjektiv.)

1.1.12. Definitionen: (1) Es sei X eine nichtleere Menge. Für $A \subset X$ definieren wir $f_A: X \longrightarrow 2^X$

$$x \longmapsto \begin{cases} A & \text{falls } x \in A \\ \emptyset & \text{falls } x \in X \setminus A \end{cases}.$$

Für eine beliebige Abbildung $f: X \longrightarrow 2^X$ sei $f^c: X \longrightarrow 2^X$ definiert durch $f^c(x) := X \setminus f(x)$ für alle $x \in X$.

(2) Es sei $(X, \underline{X})$ ein topologischer Raum.

Für $i = 1,2,3$ definieren wir Abbildungen $f_i: X \longrightarrow \underline{X}$ durch

$f_1(x) := X \setminus \overline{\{x\}}$, $f_2(x) := X \setminus \bigcap_{U \in \underline{U}(x)} \overline{U}$, $f_3(x) := X \setminus \bigcap_{U \in \underline{U}(x)} \overline{U}$

und Abbildungen $g_i: X \longrightarrow 2^X$ durch

$g_1(x) := \{x\}$, $g_2(x) := \{x\}'$, $g_3(x) := \bigcap_{U \in \underline{U}(x)} U$.

1.1.13. Bemerkungen: (1) $(f^c)^c = f$ für alle Abbildungen $f: X \longrightarrow 2^X$.

(2) f reflexiv $\iff$ f^c total unreflexiv .

(3) $f_\emptyset \leq f_3 \leq f_2 \leq f_1 \leq f_X$.

(4) $f_1 \leq g_1^c$, $f_1 \leq g_2^c$, $f_2 \leq g_3^c \leq g_1^c$.

(5) $\underline{X} = \underline{X}_{f_X} \subset \underline{X}_{f_1} \subset \underline{X}_{f_2} \subset \underline{X}_{f_3} \subset \underline{X}_{f_\emptyset} = 2^X$.

(6) f_1, f_2, f_3 und $f_\emptyset$ sind total unreflexiv; g_1, g_2^c, g_3 und f_X sind transitiv und reflexiv.

(7) f_1 ist größtes Element (bez. "$\leq$") der Menge $\{f \,/\, f: X \longrightarrow \underline{X}$ total unreflexiv$\}$.

1.1.14. Lemma: Es sei $(X, \underline{X})$ ein topologischer Raum.

Dann ist $(X, \underline{X}_{f_2})$ ein T_1-Raum.

Beweis: Sei $x \in X$. Zu zeigen $\{x\} = cl_{f_2}\{x\}$. Wir zeigen, daß $\{x\}_{f_2} = \emptyset$ gilt. Angenommen, es existiert ein $y \in \{x\}_{f_2}$. Dann gilt für jede Umgebung $U \in \underline{U}(y)$ (in $(X, \underline{X})$) $(U \cap f_2(y)) \cap \{x\} \neq \emptyset$. Wir erhalten mit $x \in \bigcap_{U \in \underline{U}(y)} (U \cap f_2(y)) = f_2(y) \cap \bigcap_{U \in \underline{U}(y)} U = (X \setminus \bigcap_{U \in \underline{U}(y)} U) \cap \bigcap_{U \in \underline{U}(y)} U = \emptyset$ einen Widerspruch!

1.1.15. Satz: Es sei (X, cl) ein topologischer Raum. Dann impliziert jede der

folgenden Bedingungen die nächst folgende:

1) $cl_{f_\emptyset} = cl$.
2) (X,cl) ist ein T_2-Raum.
3) $cl_{f_3} = cl_{f_2} = cl$.
4) (X,cl) ist ein T_1-Raum.
5) $cl_{f_1} = cl$.
6) (X,cl) ist T_D-Raum.
7) $cl_{f_X} = cl$.

Zur Darstellung der transitiven Abbildungen benötigen wir nachfolgende Definitionen.

1.1.16. Definitionen: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum und $\underline{C} \subset 2^X$.

a) Für alle $x \in X$ sei $A(x,\underline{C}) := \bigcap \{O \,/\, O \in \underline{X} \text{ mit } x \in O\}$.

b) $f_{\underline{C}}: X \longrightarrow 2^X$ sei definiert durch

$$x \longmapsto A(x, \underline{C}).$$

c) Eine offene Überdeckung $\underline{C}$ von X heißt Q-Überdeckung ([SW]), wenn gilt $A(x,\underline{C}) \in \underline{X}$ für alle $x \in X$.

1.1.17. Bemerkungen: (1) $\underline{C} \subset \underline{C}' \Longrightarrow f_{\underline{C}'} \leq f_{\underline{C}}$.

(2) $f_{\{\emptyset\}} = f_\emptyset$.

(3) $f_{\underline{X}} = g_3$.

(4) $f_{(2^X)} = g_1$.

(5) $f_{\{X\}} = f_X$.

(6) Ist $\underline{C}$ eine endliche (punktendliche, lokalendliche) offene Überdeckung von X, so ist $\underline{C}$ eine Q-Überdeckung, und es gilt $\underline{X} = \underline{X}_{f_{\underline{C}}}$.

1.1.18. Satz: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum und $\underline{C} \subset 2^X$. Dann gilt:

1) $f_{\underline{C}}$ ist transitiv.
2) $\underline{C}$ ist Überdeckung von $X \Longleftrightarrow f_{\underline{C}}$ ist reflexiv.
3) $\underline{C}$ ist Q-Überdeckung von $X \Longleftrightarrow \underline{X} = \underline{X}_{f_{\underline{C}}}$.

Beweis: Zu (1): Sei $y \in (f_{\underline{C}} \circ f_{\underline{C}})(x)$. Dann existiert ein $z \in f_{\underline{C}}(x) = A(x,\underline{C})$ mit $y \in f_{\underline{C}}(z) = A(z,\underline{C})$. Ist jetzt $O \in \underline{C}$ mit $x \in O$, dann gilt $z \in O$. Hieraus folgt $y \in O$, womit insgesamt $y \in A(x,\underline{C})$ gezeigt ist.

Zu (2): " $\Longrightarrow$ ": Ist $x \in X$, dann existiert ein $O \in \underline{C}$ mit $x \in O$. Es folgt $x \in A(x,\underline{C}) = f_{\underline{C}}(x)$.

" $\Longleftarrow$ ": Ist $x \in X$, so gilt $x \in f_{\underline{C}}(x) = A(x,\underline{C}) \neq \emptyset$.

Zu (3): " $\Longrightarrow$ ": Ist $\underline{C}$ eine Q-Überdeckung von X, so gilt $f_{\underline{C}}(x) = A(x,\underline{C}) \in \underline{X}$, d.h. $f_{\underline{C}}$ ist eine reflexive Abbildung in $\underline{X}$. Aus 1.1.6.(4) folgt $\underline{X} = \underline{X}_{f_{\underline{C}}}$.

" $\Longleftarrow$ ": Sei $x \in X$. Nach 1.1.6.(2) gilt, weil $f_{\underline{C}}$ transitiv ist, $f_{\underline{C}}(x) = A(x,\underline{C}) \in \underline{X}_{f_{\underline{C}}}$. Aus $\underline{X} = \underline{X}_{f_{\underline{C}}}$ folgt $A(x,\underline{C}) \in \underline{X}$. qed.

1.1.19. Satz: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum, $g: X \longrightarrow 2^X$ reflexiv. Dann sind äquivalent:

1) g transitiv,
2) Es existiert $\underline{C}_g \subset 2^X$ mit $g = f_{\underline{C}_g}$.

Beweis: (2) $\Longrightarrow$ (1): klar nach 1.1.18.(1).

(1) $\Longrightarrow$ (2): Wähle $\underline{C}_g := \{g(x) \,/\, x \in X\}$. Dann gilt $f_{\underline{C}_g}(x) = g(x)$ für alle $x \in X$:

" $\subset$ ": Da g reflexiv ist, gilt $f_{\underline{C}_g}(x) = A(x,\underline{C}_g) \subset g(x)$.

" $\supset$ ": Ist $y \in g(x)$ und $g(z) \in \underline{C}_g$ mit $x \in g(z)$, so folgt aus der Transitivität von g gerade $y \in g(z)$. Also gilt $y \in f_{\underline{C}_g}(x)$.

Bemerkung: Die transitive und reflexive Abbildung g_2^c wird von dem System $\{X \setminus \{x\}' \,/\, x \in X\}$ (der nicht notwendigerweise offenen Mengen) erzeugt. Nachfolgend geben wir zwei Eigenschaften von Abbildungen $f: X \longrightarrow 2^X$ an, die wir in späteren Abschnitten benötigen.

1.1.20. Definitionen: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f: X \longrightarrow 2^X$ heißt:

a) schwach reflexiv, wenn gilt $\bigcap_{U \in \underline{U}(x)} \overline{U} \cap f(x) \neq \emptyset$ für alle $x \in X$,

b) stark reflexiv, wenn für alle $x,y \in X$ gilt:

$$x \in \overline{\{y\}} \Longrightarrow y \in f(x) .$$

1.1.21. Bemerkungen: (1) stark reflexiv $\Longrightarrow$ reflexiv $\Longrightarrow$ schwach reflexiv.

(2) Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum und $f: X \longrightarrow 2^X$ reflexiv. Ist $(X,\underline{X})$ ein T_1-Raum oder gilt $f[X] \subset \underline{X}$, dann ist f stark reflexiv.

(3) Jede Abbildung $f \geq g_3$ ist stark reflexiv.

(4) Für einen mindestens zweipunktigen indiskreten Raum X ist jede Abbildung $f: X \longrightarrow 2^X \setminus \{\emptyset\}$ schwach reflexiv.

(5) Ist $f: X \longrightarrow \underline{X}$ schwach reflexiv, dann gilt: $x \in \overline{f(x)}$ für alle $x \in X$.

Die Bedeutung der starken Reflexivität liegt im nachfolgenden Satz:

1.1.22. Satz: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum und $f: X \longrightarrow 2^X$ eine stark reflexive Abbildung. Dann sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist R_o- Raum,

2) $(X,\underline{X}_f)$ ist R_o-Raum.

Beweis: Wie man leicht verifiziert, wird durch die Bedingung 1.1.6.(1b) stets eine Topologie auf X induziert, auch wenn f keine der Voraussetzungen aus Satz 1.1.5. erfüllt. Wir bezeichnen diese Topologie ebenfalls mit $\underline{X}_f$.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Ist $x \in O \subset \underline{X}_f$, dann existiert eine offene Umgebung $U \in \overset{\circ}{\underline{U}}(x)$ (bez. $\underline{X}$) mit $U \cap f(x) \subset O$. Weil $(X,\underline{X})$ ein R_o-Raum ist, gilt $\overline{\{x\}} \subset U$. Die starke Reflexivität von f impliziert $\overline{\{x\}} \subset f(x)$ (aus $y \in \overline{\{x\}}$ folgt $x \in \overline{\{y\}}$, also $y \in f(x)$). Insgesamt gilt $\overline{\{x\}} \subset U \cap f(x) \subset O$. qed.

(2) $\Longrightarrow$ (1): Seien $x,y \in X$ mit $y \in \overline{\{x\}}$.

Beh.: $y \in \overline{\{x\}}^{\underline{X}_f}$.

Bew.: Ist O eine offene Umgebung von y in $(X,\underline{X}_f)$, dann existiert eine Umgebung U von y (bez. $\underline{X}$) mit $U \cap f(x) \subset O$. $y \in \overline{\{x\}}$ impliziert $x \in U$ und - da f stark reflexiv ist - $x \in f(y)$. Insgesamt folgt $x \in U \cap f(y) \subset O$. qed.

Da $(X,\underline{X}_f)$ R_o-Raum ist, gilt $x \in \overline{\{y\}}^{\underline{X}_f}$. Ist jetzt U eine offene Umgebung von x bez. $\underline{X}$, dann ist U - wegen $\underline{X} \subset \underline{X}_f$ - auch Umgebung bez. $\underline{X}_f$. Also gilt $y \in U$. Damit ist $x \in \overline{\{y\}}$ gezeigt.

Nachfolgend untersuchen wir einige strukturelle Eigenschaften der Hüllenbildung cl_f. Dazu führen wir die Kategorie (a)-Top der (a)-topologischen Räume ein.

1.1.23. Satz: $(X,\underline{X})$, $(Y,\underline{Y})$ seien topologische Räume, $h: X \longrightarrow Y$ sei eine stetige Abbildung. Ist $g: Y \longrightarrow 2^Y$ eine Abbildung, dann definieren wir $f: X \longrightarrow 2^X$ durch $f(x) := h^{-1}[g(h(x))]$ für alle $x \in X$.

f ist eine wohldefinierte Abbildung mit den Eigenschaften:

1) $g[Y] \subset \underline{Y} \Longrightarrow f[X] \subset \underline{X}$,
2) g transitiv $\Longrightarrow$ f transitiv,
3) g stark reflexiv $\Longrightarrow$ f stark reflexiv,
4) g reflexiv $\Longrightarrow$ f reflexiv,
5) g total unreflexiv $\Longrightarrow$ f total unreflexiv.

Beweis: trivial.

Bemerkung: Die Rückrichtungen von (2), (4) und (5) gelten, wenn h zusätzlich surjektiv ist; für (1) muß h stetig, surjektiv und offen sein, und die Umkehrung von (3) gilt im allgemeinen nur, wenn h topologisch ist.

1.1.24. Definitionen: (1) Ein Tripel $(X,\underline{X},f)$, wobei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum und $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung ist, heißt (a)-topologischer Raum.

(2) Sind $(X,\underline{X},f)$ und $(Y,\underline{Y},g)$ zwei (a)-topologische Räume, so heißt eine Abbildung $h: X \longrightarrow Y$ (a)-stetig, wenn gilt:
(i) $h^{-1}[O] \in \underline{X}$ für alle $O \in \underline{Y}$ (d.h. h ist stetig),
(ii) $f(x) = h^{-1}[(g(h(x))]$ für alle $x \in X$.

1.1.25. Satz: Die (a)-topologischen Räume bilden mit den (a)-stetigen Abbildungen als Morphismen eine Kategorie.

Beweis: Das Kompositum zweier (a)-stetiger Abbildungen ist (a)-stetig. Für

die Identität 1_X auf X gilt: $f = 1_X^{-1} \circ f \circ 1_X$ für alle Abbildungen $f \in (2^X)^X$.

1.1.26. Satz: Die Zuordnung G: (a)-Top ⟶ Top definiert durch

$(X,\underline{X},f) \longmapsto (X,\underline{X}_f)$ für Objekte und

$h \longmapsto h$ für Morphismen

ist funktoriell.

Beweis: Daß $\underline{X}_f$ stets eine Topologie auf X ist, wurde bereits im Beweis von 1.1.22. bemerkt. Wir müssen für eine (a)-stetige Abbildung $h: (X,\underline{X},f) \longrightarrow (Y,\underline{Y},g)$ zeigen, daß $h: (X,\underline{X}_f) \longrightarrow (Y,\underline{Y}_g)$ stetig ist. Sei $O \in \underline{Y}_g$ und $x \in h^{-1}[O]$. Dann gilt $h(x) \in O$, also existiert eine Umgebung $U \in \underline{U}(h(x))$ (bez. $\underline{Y}$) mit $U \cap g(h(x)) \subset O$. Es folgt $h^{-1}[U] \cap f(x) = h^{-1}[U] \cap h^{-1}[g(h(x))] = h^{-1}[U \cap g(h(x))] \subset h^{-1}[O]$. Weil h stetig ist, ist $h^{-1}[U]$ eine Umgebung von x bez. $\underline{X}$, also gilt $h^{-1}[O] \in \underline{X}_f$.

1.1.27. Satz: Für i = 1,2,3 sind folgende Zuordnungen funktoriell:

$$\underline{F}_i^c: \underline{Top} \longrightarrow \underline{Top}, \quad (X,\underline{X}) \longmapsto (X,\underline{X}_{f_i}c), \quad h \longmapsto h$$

$$\underline{G}_i: \underline{Top} \longrightarrow \underline{Top}, \quad (X,\underline{X}) \longmapsto (X,\underline{X}_{g_i}), \quad h \longmapsto h$$

Beweis: Exemplarisch sei der Fall $\underline{F}_3^c$ gezeigt. Dazu müssen wir für eine stetige Abbildung $h: (X,\underline{X}) \longrightarrow (Y,\underline{Y})$ nachweisen, daß $h: (X,\underline{X}_{f_3}c) \longrightarrow (Y,\underline{Y}_{f_3}c)$ stetig ist. Sei $O \in \underline{Y}_{f_3}c$ und $x \in h^{-1}[O]$. Um $h^{-1}[O] \in \underline{X}_{f_3}c$ zu zeigen, genügt es, $\bigcap_{U \in \underline{U}(x)} \overline{U} \subset h^{-1}\left[\bigcap_{V \in \underline{U}(h(x))} \overline{V}\right]$ nachzuweisen. Sei $x' \in \bigcap_{U \in \underline{U}(x)} \overline{U}$. Sind W und W' beliebige Umgebungen von h(x) bzw. h(x'), so sind $h^{-1}[W]$ und $h^{-1}[W']$ Umgebungen von x bzw. x'. $x' \in \bigcap_{U \in \underline{U}(x)} \overline{U}$ impliziert $h^{-1}[W \cap W'] = h^{-1}[W] \cap h^{-1}[W'] \neq \emptyset$. Es folgt $W \cap W' \neq \emptyset$, womit $h(y) \in \bigcap_{V \in \underline{U}(h(x))} \overline{V}$ gezeigt ist.

1.1.28. Korollar: (X,$\underline{X}$), (Y,$\underline{Y}$) seien topologische Räume, $h: (X,\underline{X}) \longrightarrow (Y,\underline{Y})$ eine stetige Abbildung.

1) Ist (Y,$\underline{Y}$) ein T_1-Raum, dann gilt $\{h^{-1}[O] / O \subset Y\} \subset \underline{X}_{f_2}c$.

2) Ist $(Y,\underline{Y})$ ein T_2-Raum, dann gilt $\{h^{-1}[O] / O \subset Y\} \subset \underline{X}_{f_3}c$.

Beweis: Zu (1): Ist $(Y,\underline{Y})$ ein T_1-Raum, dann ist, wie man leicht sieht, $(Y,\underline{Y}_{f_2}c)$ diskret. Weil $h: (X,\underline{X}_{f_2}c) \longrightarrow (Y,\underline{Y}_{f_2}c)$ nach 1.1.27. stetig ist, folgt die Behauptung trivialerweise.

Zu (2): analog.

1.1.28. Bemerkungen: (1) Bezeichnet $\underline{V}$: (a)-$\underline{Top} \longrightarrow \underline{Top}$ den Quasi-Vergiß-Funktor $(X,\underline{X},f) \longmapsto (X,\underline{X})$ und

$\underline{F}: \underline{Top} \longrightarrow$ (a)-$\underline{Top}$ den Funktor $(X,\underline{X}) \longmapsto (X,\underline{X},f_{\underline{X}})$, so gilt

$$\underline{G} \circ \underline{F} = \underline{I}_{\underline{Top}} = \underline{V} \circ \underline{F}.$$

(2) Bezeichnet (a)-$\underline{Top}^*$ die Unterkategorie von (a)-$\underline{Top}$, für deren Objekte $(X,\underline{X},f)$ "$f[X] \subset \underline{X}$ oder f transitiv" gilt, dann ist $\underline{H}$: (a)-$\underline{Top} \longrightarrow$ (a)-$\underline{Top}^*$ definiert durch $(X,\underline{X},f) \longmapsto (X,\underline{X}_f,f)$ ein Funktor. (1.1.6.(2).) Es gilt $\underline{G} \circ \underline{H} = \underline{G}$.

(3) Für jede Abbildung $f: X \longrightarrow 2^X$ ist die Abbildung $f^{\cdot}: X \longrightarrow 2^X$ definiert durch

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } (f \circ f)(X) \subset f(x) \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

transitiv. Die Zuordnung $\underline{T}$: (a)-$\underline{Top} \longrightarrow$ (a)-$\underline{Top}^*$

$$(X,\underline{X},f) \longmapsto (X,\underline{X},f^T)$$

ist funktoriell, wenn als Morphismen in (a)-$\underline{Top}$ nur die surjektiven (a)-stetigen Abbildungen zugelassen werden.

(4) Für jedes Objekt $(X,\underline{X},f) \in |(a)\text{-}\underline{Top}^*|$ ist cl_f nach 1.1.5. ein Hüllenoperator. Da für $h \in [(X,\underline{X},f),(Y,\underline{Y},g)]_{(a)\text{-}\underline{Top}^*}$ aber auch $h(cl_f A) \subset cl_g(hA)$ gilt, ist cl_f bereits ein idempotenter Limesoperator ([Hei]) der Kategorie (a)-$\underline{Top}^*$.

(5) Für die Kategorie (a)-$\underline{Top}^T$ aller (a)-topologischen Räume $(X,\underline{X},f)$, für die f transitiv ist, gilt:

$$\underline{T} \circ \underline{H} = \underline{I}_{(a)\text{-}\underline{Top}^T} = \underline{H} \circ \underline{T}.$$

1.2. $(\underline{A},f)$-Räume

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, wie sich die Enthaltenseinsrelation des 1. Abzählbarkeitsaxioms (... in jeder weiteren Umgebung von x ist ein U_n enthalten ...) verallgemeinern läßt. In diesem Abschnitt wird zunächst die lokale Aussage (... zu jeder weiteren Umgebung von x gibt es ...) einem allgemeinen Prinzip untergeordnet und anschließend der Begriff des $(\underline{A},f)$-Raumes - der unsere eigentliche Verallgemeinerung des 1. Abzählbarkeitsaxioms darstellt - eingeführt.

1.2.1. Definitionen: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum.

a) Eine Abbildung $k: X \longrightarrow 2^X$ heißt Überdeckung von X, wenn $(k(x))_{x \in X}$ eine Überdeckung von X ist.

b) $\underline{A}_c := \{k \,/\, k: X \longrightarrow \underline{X}$ konstante Abbildung$\}$.

$\underline{A}_e := \{k \,/\, k: X \longrightarrow \underline{X}$ Überdeckung, $\{k(x) \,/\, x \in X\}$ endlich$\}$.

$\underline{A}_a := \{k \,/\, k: X \longrightarrow \underline{X}$ Überdeckung, $\{k(x) \,/\, x \in X\}$ abzählbar$\}$.

$\underline{A}_b := \{k \,/\, k: X \longrightarrow \underline{X}$ Überdeckung$\}$.

c) Für $\underline{A} \subset \underline{X}^X$, $B \subset X$ und $x \in X$ sei:

$\underline{A}(B) := \{k \,/\, k \in \underline{A}$ mit $B \subset \bigcup_{x \in X} k(x)\}$,

$\underline{A}(x) := \underline{A}(\{x\})$.

1.2.2. Bemerkungen: (1) Analog zu 1.2.1.(b) sei:

$\underline{A}_l := \{k \,/\, k: X \longrightarrow \underline{X}$ Überdeckung, $\{k(x) \,/\, x \in X\}$ lokalendlich$\}$,

$\underline{A}_p := \{k \,/\, k: X \longrightarrow \underline{X}$ Überdeckung, $\{k(x) \,/\, x \in X\}$ punktendlich$\}$.

(2) Es gilt: $\underline{A}_e \subset \underline{A}_l \subset \underline{A}_p \subset \underline{A}_b$ und $\underline{A}_e \subset \underline{A}_a \subset \underline{A}_b$.

1.2.3. Lemma: $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum, $\underline{A}$, $\underline{A}'$ und B, B' seien Teilmengen von $\underline{X}^X$ bzw. X. Dann gilt:

1) $\underline{A} \subset \underline{A}'$ und $B \subset B' \Longrightarrow \underline{A}(B') \subset \underline{A}'(B)$.

2) Es sind äquivalent: (a) $\underline{A} \subset \underline{A}_b$,

(b) $\underline{A}(B) = \underline{A}$ für alle $B \subset X$,

(c) $\underline{A}(x) = \underline{A}$ für alle $x \in X$.

3) Für jeden Punkt $x_o \in X$ ist Φ: $\underline{A}_c(x_o) \longrightarrow \underline{\dot{U}}(x_o)$ definiert durch

$$k \longmapsto k(x)$$

eine Bijektion.

1.2.4. Definitionen: $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum, $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung und $\underline{A}$ eine Teilmenge von $\underline{X}^X$.

a) Eine Familie $(U_j)_{j \in J}$ von Umgebungen von $x_o \in X$ heißt $(\underline{A},f)$-Umgebungsfamilie von x_o, wenn gilt:

(1) $\{U_j \,/\, j \in J\}$ ist Filterbasis auf X,

(2) Für alle $k \in \underline{A}(x_o)$ existieren $j \in J$ und $x \in X$ mit $U_j \cap f(x_o) \subset k(x)$.

b) $(X,\underline{X})$ heißt $(\underline{A},f)$-Raum, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine abzählbare $(\underline{A},f)$-Umgebungsfamilie besitzt.

(Für $i \in \{c,e,l,p,a,b\}$ schreiben wir statt $(\underline{A}_i,f)$-Raum kurz (i,f)-Raum)

1.2.5. Lemma: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum, $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung und $\underline{A}$ eine Teilmenge von $\underline{X}^X$.

1) Für $\underline{A}' \subset \underline{A}$ gilt:

$$(X,\underline{X})\ (\underline{A},f)\text{-Raum} \Longrightarrow (X,\underline{X})\ (\underline{A}',f)\text{-Raum}\ .$$

2) Ist $f': X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung mit $f' \leq f$, so gilt:

$$(X,\underline{X})\ (\underline{A},f)\text{-Raum} \Longrightarrow (X,\underline{X})\ (\underline{A},f')\text{-Raum}\ .$$

3) $(X,\underline{X})$ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom $\Longrightarrow$ $(X,\underline{X})$ ist $(\underline{A},f)$-Raum.

1.2.6. Beispiele: (1) Bezeichnet $(S,\underline{S})$ den Sierpinski-Raum, so ist $X := \coprod_{r \in \mathbb{R}} X_r$ mit $X_r := (S,\underline{S})$ für alle $r \in \mathbb{R}$ ein (b,f)-Raum (für jede Abbildung $f: X \longrightarrow 2^X$), der nicht das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

(2) $\mathbb{R}$ versehen mit der Topologie $\underline{\mathbb{R}}_a$ der abzählbaren Komplemente ist ein topologischer Raum, der nicht das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, der aber $(\underline{A},f_3)$-Raum ist für jede Teilmenge $\underline{A}$ von $\underline{\mathbb{R}}_a^{\mathbb{R}}$.

1.2.7. Lemma: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum, $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung und $\underline{A} \subset \underline{X}^X$. Ist $\underline{A} \subset \underline{A}_b$, so gilt:

$$(X,\underline{X})\ (c,f)\text{-Raum} \Longrightarrow (X,\underline{X})\ (\underline{A},f)\text{-Raum}\ .$$

Beweis: Sei $x_o \in X$. Dann existiert eine abzählbare (c,f)-Umgebungsfamilie $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von x_o. Ist $k \in \underline{A}(x_o)$, so folgt nach 1.2.3.(1) $k \in \underline{A}_b(x_o)$. Also gibt es $x' \in X$ mit $x_o \in k(x') \in \underline{\mathring{U}}(x_o)$. Definieren wir $k'\colon X \longrightarrow \underline{X}$ durch $k'(x) := k(x')$ für alle $x \in X$, so gilt $k' \in \underline{A}_c(x_o)$. Nach Voraussetzung existieren $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ mit $U_n \cap f(x_o) \subset k'(x) = k(x')$. qed.

1.2.8. Satz: Es sei $(X,\underline{X})$ ein T_3-Raum, $f\colon X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung und $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A}_e \subset \underline{A} \subset \underline{A}_b$. Ist f schwach reflexiv oder gilt $f_3 \leq f$, dann sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist (c,f)-Raum,
2) $(X,\underline{X})$ ist $(\underline{A},f)$-Raum.

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): Lemma 1.2.7.

2) $\Longrightarrow$ 1): Sei $x_o \in X$. Ist $k \in \underline{A}_c(x_o)$, dann existiert ein $O \in \mathring{\underline{U}}(x_o)$ mit $k(x) = O$ für alle $x \in X$. Weil $(X,\underline{X})$ T_3-Raum ist, finden wir eine Umgebung $\overline{V} \in \underline{U}(x_o)$ mit $V \subset O$.

1. Fall: $\bigcap_{U\in\underline{U}(x_o)} \overline{U} \in \underline{U}(x_o)$. Wähle $U_n := \bigcap_{U\in\underline{U}(x_o)} \overline{U}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $U_n \subset \overline{V} \subset O$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $U_n \cap f(x_o) \subset U_n \subset O = k(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X$.

2. Fall: $\bigcap_{U\in\underline{U}(x_o)} \overline{U} \notin \underline{U}(x_o)$. Wir definieren $k'\colon X \longrightarrow \underline{X}$

$$x \longmapsto \begin{cases} O & \text{für } x \in O \\ X \setminus \overline{V} & \text{sonst}\ . \end{cases}$$

Dann gilt $k' \in \underline{A}_e = \underline{A}_e(x_o)$. 1.2.3.(1) impliziert $k' \in \underline{A}(x_o)$. Ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die (c,f)-Umgebungsfamilie von x_o, so existieren $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ mit $U_n \cap f(x_o) \subset k'(x)$.

Beh.: $x \in O$.

Bew. (indirekt): Angenommen, es gilt $x \notin O$. Dann folgt $k'(x) = X \setminus \overline{V}$, also $U_n \cap f(x_o) \subset X \setminus \overline{V}$. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

a) $f_3 \leq f$: Aus $U_n \cap f(x_o) \cap \overline{V} = \emptyset$ folgt $U_n \cap \overline{V} \subset X \setminus f(x_o)$. Wegen $f_3(x_o) \subset f(x_o)$ gilt $\bigcap_{U\in\underline{U}(x_o)} \overline{U} = X \setminus f_3(x_o) \supset X \setminus f(x_o) \supset U_n \cap \overline{V} \in \underline{U}(x_o)$. Hieraus folgt $\bigcap_{U\in\underline{U}(x_o)} \overline{U} \in \underline{U}(x_o)$. Widl!

b) f ist schwach reflexiv: Dann gilt $\bigcap_{U \in \underline{U}(x_0)} \overline{U} \cap f(x_0) \neq \emptyset$. Da $(X,\underline{X})$ T_3-Raum ist, existiert eine Umgebung $U' \in \underline{U}(x_0)$ mit $\overline{U'} \subset U_n \cap \overline{V}$. Es folgt $U_n \cap f(x_0) \cap \overline{V} \supset f(x_0) \cap \overline{U'} \supset \bigcap_{U \in \underline{U}(x_0)} \overline{U} \cap f(x_0) \neq \emptyset$. Widerspruch!
Mit $x \in O$ gilt nun $U_n \cap f(x_0) \subset k'(x) = O = k(x)$. qed.

1.2.9. Lemma: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum und $f: X \longrightarrow \mathcal{P}^X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft $f(x) \cup \{x\} \in \underline{U}(x)$ für alle $x \in X$. Dann sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom,
2) $(X,\underline{X})$ ist ein (c,f)-Raum.

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): Lemma 1.2.5.(3).
2) $\Longrightarrow$ 1): Es sei $x_0 \in X$ und $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die (c,f)-Umgebungsfamilie von x_0. Dann ist $(U'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $U'_n := U_n \cap (f(x_0) \cup \{x_0\})$ die gesuchte abzählbare Umgebungsbasis von x_0: Für $U \in \mathring{\underline{U}}(x_0)$ definieren wir $k_U: X \longrightarrow \underline{X}$ durch $k_U(x) := U$ für alle $x \in X$. Wegen $k_U \in \underline{A}_c(x_0)$ existieren $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ mit
$U'_n = (U \cap f(x_0)) \cup \{x_0\} \subset k_U(x) = U$. qed.

1.2.10. Bemerkung: Ist $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum und $f: X \longrightarrow \underline{X}$ eine reflexive Abbildung, so gilt $f(x) \cup \{x\} \in \mathring{\underline{U}}(x)$ für alle $x \in X$. Da jede reflexive Abbildung auch schwach reflexiv ist, erhalten wir durch Kombination von 1.2.8 und 1.2.9

1.2.11. Satz: Es sei $(X,\underline{X})$ ein T_3-Raum, $f: X \longrightarrow \underline{X}$ reflexiv und $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A}_e \subset \underline{A} \subset \underline{A}_b$. Dann sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom,
2) $(X,\underline{X})$ ist $(\underline{A},f)$-Raum.

Bemerkung: Die $(\underline{A},f)$-Eigenschaft ist nicht erblich. Um wenigstens Erblichkeit auf abgeschlossene Unterräume sichern zu können, ist es nötig, Teilmengen $\underline{A}$ von $\underline{X}^X$ als abgeschlossen auszuzeichnen. Dazu konstruieren wir eine Topologie $\mathfrak{X}$ auf $\underline{X}^X$ so, daß insbesondere $\underline{A}_e$, $\underline{A}_1$, $\underline{A}_p$, $\underline{A}_a$, $\underline{A}_b$ abgeschlossen sind.

1.2.12. Definitionen: $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum, $k: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung, $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ und $B \subset X$.

1) $k_{sB}: B \longrightarrow 2^B$

$x \longmapsto k(x) \cap B$.

2) $k_{cB}: X \longrightarrow 2^X$

$$x \longmapsto \begin{cases} (*) & \text{für } x \in B \\ X \setminus B & \text{für } x \in X \setminus B \end{cases} .$$

3) $\underline{A}_{sB} := \{k_{sB} \,/\, k \in \underline{A}\} \subset \underline{X}_B^B$.

4) $\underline{A}_{cB} := \{k_{cB} \,/\, k \in \underline{A}\}$.

(Bem.: Ist B abgeschlossen, so gilt $\underline{A}_{cB} \subset \underline{X}^X$.)

1.2.13. Satz: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum.

Für den Operator $l: 2^{(\underline{X}^X)} \longrightarrow 2^{(\underline{X}^X)}$

$$\underline{A} \longmapsto \bigcup \{\underline{A}_{cB} \,/\, B \subset X \text{ abgeschlossen}\}$$

gilt:

1) $\underline{A} \subset l\underline{A}$ für alle $\underline{A} \in 2^{(\underline{X}^X)}$.

2) $\emptyset = l\emptyset$.

3) $\underline{A} \subset \underline{A}' \Longrightarrow l\underline{A} \subset l\underline{A}'$ für alle $\underline{A}, \underline{A}' \in 2^{(\underline{X}^X)}$.

4) $l(\underline{A} \cup \underline{A}') = l\underline{A} \cup l\underline{A}'$ für alle $\underline{A}, \underline{A}' \in 2^{(\underline{X}^X)}$.

Beweis: Zu (1): Ist $k \in \underline{A}$, also k eine beliebige Abbildung von X in $\underline{X}$, dann gilt $k = k_{cX} \in \underline{A}_{cX} \subset l\underline{A}$.

Zu (2): "$\subset$" klar nach (1).

"$\supset$" (indirekt): Angenommen, es existiert $k \in l\emptyset \neq \emptyset$. Dann gibt es eine abgeschlossene Teilmenge B von X mit $k \in \emptyset_{cB}$. Nach Definition von $\emptyset_{cB}$ muß ein $k \in \emptyset$ existieren mit $k = k_{cB}$. Widerspruch!

Zu (3): $\underline{A} \subset \underline{A}'$ impliziert $\underline{A}_{cB} \subset \underline{A}'_{cB}$ für alle $B \subset X$. Es folgt $l\underline{A} \subset l\underline{A}'$.

Zu (4): "$\supset$" folgt aus (3).

"$\subset$" Sei $k \in l(\underline{A} \cup \underline{A}')$. Dann existiert eine abgeschlossene Menge $B \subset X$ mit $k \in (\underline{A} \cup \underline{A}')_{cB}$. Nach Definition gibt es ein $\tilde{k} \in \underline{A} \cup \underline{A}'$ mit $k = \tilde{k}_{cB}$. Ist $\tilde{k}$ aus $\underline{A}$, so folgt $k = \tilde{k}_{cB} \in \underline{A}_{cB} \subset l\underline{A}$; $\tilde{k} \in \underline{A}'$ impliziert $k \in \underline{A}'_{cB} \subset l\underline{A}'$.

1.2.14. Bemerkungen: (1) $\left\{ \underline{X}^{\underline{X}} \setminus 1\underline{A} \;/\; \underline{A} \in 2^{(\underline{X}^{\underline{X}})} \right\}$ ist Basis einer Topologie auf $\underline{X}^{\underline{X}}$, die wir mit $\mathfrak{X}$ bezeichnen.

(2) $\underline{A}_e$, $\underline{A}_l$, $\underline{A}_p$, $\underline{A}_a$ und $\underline{A}_b$ sind abgeschlossen in $(\underline{X}^{\underline{X}}, \mathfrak{X})$; $\underline{A}_c$ ist im allgemeinen weder offen noch abgeschlossen in $(\underline{X}^{\underline{X}}, \mathfrak{X})$.

1.2.15. Satz: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum, $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung und $B \subset X$ abgeschlossen.

1) Ist $\underline{A}$ abgeschlossen in $(\underline{X}^{\underline{X}}, \mathfrak{X})$, dann gilt:

$$(X,\underline{X})\ (\underline{A},f)\text{-Raum} \Longrightarrow (B,\underline{X}_B)\ (\underline{A}_{sB}, f_{sB})\text{-Raum}\ .$$

2) $$(X,\underline{X})\ (c,f)\text{-Raum} \Longrightarrow (B,\underline{X}_B)\ (c,f_{sB})\text{-Raum}\ .$$

Beweis: Zu (1): Sei $b \in B \subset X$. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichne die $(\underline{A},f)$-Umgebungsfamilie von b. Wir setzen $V_n := U_n \cap B$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beh.: $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist die $(\underline{A}_{sB}, f_{sB})$-Umgebungsfamilie von b.

Bew.: Ist $k \in \underline{A}_{sB}(b)$ beliebig, dann existiert $k' \in \underline{A}$ mit $k'_{sB} = k$ und $b \in \bigcup_{x \in B} k(x)$. Weil $\underline{A}$ abgeschlossen ist, gilt $k'_{cB} \in \underline{A}$. Wegen $b \in \bigcup_{x \in B} k(x)$ gibt es ein $x \in B$ mit $b \in k(x)$. Es folgt $k'_{cB}(x) = k'(x)$. $b \in k(x) = k'_{sB}(x) \subset k'(x) = k'_{cB}(x)$ impliziert $k'_{cB} \in \underline{A}(b)$. Nach Voraussetzung existieren $z \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $U_n \cap f(b) \subset k'_{cB}(z)$. Hieraus folgt $V_n \cap f_{sB}(b) = U_n \cap f(b) \cap B \subset k'_{cB}(z) \cap B$.

1. Fall: $z \notin B$. Dann gilt $k'_{cB}(z) \cap B = (X \setminus B) \cap B = \emptyset$, also auch $V_n \cap f_{sB}(b) = \emptyset$. Es folgt $V_n \cap f_{sB}(b) \subset k(y)$ sogar für alle $y \in B$.

2. Fall: $z \in B$. Wir erhalten $V_n \cap f_{sB}(b) \subset k'_{cB}(z) \cap B = k'(z) \cap B = k'_{sB}(z) = k(z)$.

Zu (2): Sei $b \in B$. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichne die (c,f)-Umgebungsfamilie von b bez. $(X,\underline{X})$.

Beh.: $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $V_n := U_n \cap B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist eine (c,f_{sB})-Umgebungsfamilie von b bez. $(B,\underline{X}_B)$.

Bew.: Zu $k \in (\underline{A}_c)_{sB}(b)$ existiert ein $O \in \underline{X}$ mit $k(x) = O \cap B$ für alle $x \in B$. Definieren wir k':

$$X \longrightarrow \underline{X}$$
$$x \longmapsto O\ ,$$

dann gilt $k' \in \underline{A}_c(b)$. Nach Voraussetzung finden wir $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ mit $U_n \cap f(b) \subset k'(x)$. Es folgt $V_n \cap f_{sB}(b) = U_n \cap B \cap f(b) \subset k'(x) \cap B = O \cap B = k(b)$. qed.

1.2.16. Bemerkungen: (1) Die Konstruktion der Topologie $\mathcal{X}$ auf $\underline{X}^X$ für einen topologischen Raum $(X,\underline{X})$ ist mit $\underline{X}$ verträglich in der Weise, daß für jede abgeschlossene Teilmenge B von X gilt:

$$\underline{A} \subset \underline{X}^X \text{ abgeschlossen} \Longrightarrow \underline{A}_{s\dot{B}} \subset \underline{X}_B^B \text{ abgeschlossen .}$$

(2) Nachfolgend zeigen wir, wie sich der Begriff $(\underline{A},f)$-Raum in die Reihe der bekannten Verallgemeinerungen des 1. Abzählbarkeitsaxioms einordnen läßt.

1.2.17. Definitionen: Ein topologischer Raum $(X,\underline{X})$ heißt:

a) r-Raum, wenn zu jedem $x \in X$ abzählbar viele Umgebungen U_n existieren derart, daß für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $x_n \in U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{x_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ in einer quasikompakten Teilmenge von X enthalten ist. (Michael [Mi1])

b) Frechet-Raum, wenn zu jeder Teilmenge A von X und jedem Häufungspunkt x von A eine Folge in A existiert, die gegen x konvergiert.

c) k_o-Raum, wenn zu jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, die einen Häufungspunkt besitzt, eine Teilfolge $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ existiert derart, daß die Menge $\{x_{j_n} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ in einer quasikompakten Teilmenge von X enthalten ist. (Chiba [Ch])

d) q-Raum, wenn jeder Punkt $x \in X$ abzählbar viele Umgebungen U_n besitzt derart, daß jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $x_n \in U_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) einen Häufungspunkt hat. (Michael [Mi2])

e) E_1-Raum, wenn zu jedem Punkt $x \in X$ abzählbar viele Umgebungen U_n existieren mit $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{U}_n$. (Aull [Au])

1.2.18. Bemerkungen: (1) Erfüllt $(X,\underline{X})$ das 1. Abzählbarkeitsaxiom, dann gilt:

$$(X,\underline{X}) \; T_2\text{-Raum} \Longleftrightarrow (X,\underline{X}) \; E_1\text{-Raum .}$$

(2) Ist $(X,\underline{X})$ ein E_1-Raum, dann gilt:

$$(X,\underline{X}) \text{ q-Raum} \Longleftrightarrow (X,\underline{X}) \text{ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom .}$$

(3) Es gelten folgende Implikationen:

(a) X Frechet-Raum $\Longrightarrow$ X folgenbestimmt $\Longrightarrow$ X k-Raum $\Longrightarrow$ X k_o-Raum

(b)

q-Raum

1. Abzählbarkeitsaxiom ⟶ r-Raum ⟶ k_o-Raum .

1.2.13. Satz: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum, $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung mit $\mathrm{Card}(X \setminus f(x)) < \aleph_o$ für alle $x \in X$, $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A}_b \subset \underline{A}$. Ist $(X,\underline{X})$ ein $(\underline{A},f)$-Raum, dann ist $(X,\underline{X})$ ein r-Raum.

Beweis: Es sei $x_o \in X$ und $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die $(\underline{A},f)$-Umgebungsfamilie von x_o. Sei $x_n \in U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen, daß $B := \{x_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ in einer quasikompakten Teilmenge von X enthalten ist. Angenommen, B ist nicht endlich. (Sonst trivial!) Dann repräsentiert B eine Teilfolge $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$, die aus paarweise verschiedenen Gliedern besteht.

Beh.: Es existiert $z \in X$ mit $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow z$.

Bew. (indirekt): Angenommen, $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht konvergent. Dann finden wir zu jedem $z \in X$ eine Umgebung $V_z \in \dot{\underline{U}}(z)$, die unendlich viele x_{j_n} nicht enthält. Wir definieren $k: X \longrightarrow \underline{X}$

$$z \longmapsto V_z .$$

Dann gilt $k \in \underline{A}_t(x_o) \subset \underline{A}(x_o)$. Nach Voraussetzung existieren $n_o \in \mathbb{N}$ und $z_o \in X$ mit $U_{n_o} \cap f(x_o) \subset k(z_o)$. Da $\{U_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ eine Filterbasis ist, können wir o.E. annehmen, daß $U_m \subset U_n$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ gilt. Da $f(x_o)$ höchstens endlich viele Folgenglieder nicht enthält und zu U_{n_o} alle Folgenglieder x_{j_n} mit $n \geq n_o$ gehören, müssen in $V_{z_o} = k(z_o)$ fast alle Glieder der Folge $(x_{j_n})_n$ liegen. Widerspruch!

Weil $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $z \in X$ konvergiert, ist $B' := \{x_{j_n} \,/\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ quasikompakt. $B \subset B'$ impliziert die Behauptung.

1.2.14. Korollar: $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum, $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung und $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A}_b \subset \underline{A}$.

1) Ist $(X,\underline{X})$ ein T_1-Raum und $f_1 \leq f$, dann gilt:

$$(X,\underline{X})\ (\underline{A},f)\text{-Raum} \Longrightarrow (X,\underline{X})\ \text{r-Raum} .$$

2) Ist $(X,\underline{X})$ T_2-Raum und $f_3 \leq f$, dann gilt:

$$(X,\underline{X})\ (\underline{A},f)\text{-Raum} \Longrightarrow (X,\underline{X})\ \text{r-Raum}\ .$$

3) Gilt $f_3 \leq f$, dann sind äquivalent:

(a) $(X,\underline{X})$ ist E_1- und $(\underline{A},f)$-Raum,

(b) $(X,\underline{X})$ ist T_2-Raum und erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

1.2.21. Bemerkungen: (1) In der Klasse der T_1- Räume läßt sich die Implikationskette 1.2.18.(3b) wie folgt erweitern:

1. Abzählbarkeitsaxiom $\longrightarrow$ (b,f_1)-Raum $\longrightarrow$ r-Raum $\longrightarrow$ k_o-Raum

(2) Im folgenden Abschnitt zeigen wir, daß mit den Voraussetzungen aus 1.2.20.(2) sogar gilt:

$$(X,\underline{X})\ (\underline{A},f)\text{-Raum} \Longleftrightarrow (X,\underline{X})\ \text{erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom}\ .$$

1.3. Charakterisierungen des 1. Abzählbarkeitsaxioms

1.3.1. Satz: Für einen T_3-Raum $(X,\underline{X})$ sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

2) $(X,\underline{X})$ ist $(\underline{A},f)$-Raum für jede Abbildung $f: X \longrightarrow 2^X$ mit $f_3 \leq f$ und jede Teilmenge $\underline{A}$ von $\underline{X}^X$ mit $\underline{A}_e \subset \underline{A} \subset \underline{A}_b$.

3) $(X,\underline{X})$ ist (e,f_3)-Raum.

4) Es existieren eine Abbildung $f: X \longrightarrow 2^X$ mit $f_3 \leq f$ und eine Menge $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A}_e \subset \underline{A} \subset \underline{A}_b$ derart, daß $(X,\underline{X})$ ein $(\underline{A},f)$-Raum ist.

5) $(X,\underline{X})$ ist $(\underline{A},f)$-Raum für alle reflexiven Abbildungen $f: X \longrightarrow \underline{X}$ und jede Menge $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A}_e \subset \underline{A} \subset \underline{A}_b$.

6) Es existieren eine reflexive Abbildung $f: X \longrightarrow \underline{X}$ und eine Menge $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A}_e \subset \underline{A} \subset \underline{A}_b$ derart, daß $(X,\underline{X})$ ein $(\underline{A},f)$-Raum ist.

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): Lemma 1.2.5.(3).

2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4): trivial.

4) $\Longrightarrow$ 1): Ist $(X,\underline{X})$ $(\underline{A},f)$-Raum, so ist $(X,\underline{X})$ nach 1.2.8. auch (c,f)-Raum. Sei $x_o \in X$. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichne die (c,f)-Umgebungsfamilie von x_o. Ist U eine beliebige Umgebung von x_o, so gehört die Abbildung $k_U: X \longrightarrow \underline{X}$ definiert

durch $k_U(x) := U$ für alle $x \in X$ zu $\underline{A}_c(x_0)$. Dann existieren $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ mit $U_n \cap f(x_0) \subset k_U(x) = U$. Da $(X,\underline{X})$ T_3-Raum ist, finden wir eine Umgebung $V \in \underline{U}(x_0)$ mit $\overline{V} \subset U_n$. Hieraus folgt $\bigcap_{U \in \underline{U}(x_0)} \overline{U} \subset U_n$ bzw. $U_n \subset X \setminus \bigcap_{U \in \underline{U}(x_0)} \overline{U}$. Wegen $f_3 \leq f$ erhalten wir $X \setminus \bigcap_{U \in \underline{U}(x_0)} \overline{U} = f_3(x_0) \subset f(x_0)$ und schließlich $U_n = U_n \cap f(x_0) \subset U$. qed.

1) $\Longrightarrow$ 5) $\Longrightarrow$ 6) $\Longrightarrow$ 1): Satz 1.2.11.

1.3.2. Bemerkungen: (1) Für einen (e,f_3)-Raum $(X,\underline{X})$ gilt:

(a) $(X,\underline{X})$ kompakt $\Longrightarrow$ $(X,\underline{X})$ folgenkompakt .

(b) $(X,\underline{X})$ abzählbar kompakter T_3-Raum $\Longrightarrow$ $(X,\underline{X})$ folgenkompakt .

(2) Daß in der Klasse der T_3-Räume das 1. Abzählbarkeitsaxiom charakterisiert werden kann durch die Menge $\underline{A}_e$, liegt im wesentlichen daran, daß in T_3-Räumen $(X,\underline{X})$ mit jeder Umgebung U eines Punktes $x \in X$ bereits eine endliche offene Überdeckung (nämlich $\{U, X \setminus \overline{V}\}$ für $V \in \underline{U}(x)$ mit $\overline{V} \subset U$) von X gegeben ist. Stehen uns keine Regularitätseigenschaften zur Verfügung (so z.B. in der Klasse der T_2-Räume), dann brauchen wir zu Charakterisierung des 1. Abzählbarkeitsaxioms im allgemeinen die Menge $\underline{A}_b$:

1.3.3. Satz: $(X,\underline{X})$ sei ein T_2-Raum, $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung mit $f_3 \leq f$ und $\underline{A}$ eine Teilmenge von $\underline{X}^X$ mit $\underline{A}_b \subset \underline{A}$. Es sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

2) $(X,\underline{X})$ ist $(\underline{A},f)$-Raum.

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): trivial.

2) $\Longrightarrow$ 1): Sei $x \in X$. Es gelte $\{x\} \notin \underline{X}$ (sonst ist $\{\{x\}\}$ die gesuchte abzählbare Umgebungsbasis von x). Ist $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die $(\underline{A},f)$-Umgebungsfamilie von x, so können wir o.B.d.A. annehmen, daß $U_m \subset U_n$ gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$.

Beh.: $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Umgebungsbasis von x.

Bew. (indirekt): Angenommen, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht Umgebungsbasis von x. Dann existiert eine Umgebung $O \in \mathring{\underline{U}}(x)$ derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $U_n \not\subset O$. Also finden wir zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_n$ mit $x_n \notin O$. Insbesondere gilt $x_n \neq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $B := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$.

Lemma: B ist nicht endlich.

Beweis (indirekt): Ist B endlich, so hat B die Darstellung $B = \{x_{i_r} / r = 1,...n\} \cup \{x\}$. Als endliche Teilmenge des T_2-Raumes X ist B abgeschlossen, also gilt $X \setminus B \in \underline{X}$. Wir definieren für jedes $r \in \{1,...n\}$ $V_r := (X \setminus B) \cup \{x_{i_r}\} \supset X \setminus B$. Weil $X \setminus V_r$ endlich ist, gilt $V_r \in \mathring{\underline{U}}(x_{i_r})$; und wir erhalten eine Abbildung:

$$k: X \longrightarrow \underline{X} \text{ durch die Zuordnung}$$

$$y \longmapsto \begin{cases} V_r & \text{für } y = x_{i_r} \\ O & \text{für } y = x \\ X \setminus B & \text{für } y \in X \setminus B \end{cases}.$$

Es gilt $k \in \underline{A}_e(x) \subset \underline{A}_b(x) \subset \underline{A}(x)$. Weil $(X,\underline{X})$ $(\underline{A},f)$-Raum ist, existieren $m \in \mathbb{N}$ und $y \in X$ mit $U_m \cap f(x) \subset k(y)$. Wegen $f_3(x) = X \setminus \bigcap_{U \in \underline{U}(x)} U = X \setminus \{x\} \subset f(x)$ folgt hieraus $U_m \setminus \{x\} \subset k(y)$.

1. Fall: $y = x$. Es folgt $U_m \setminus \{x\} \subset O$, also $U_m \subset O$. Widerspruch!

2. Fall: $y \in X \setminus B$. Es folgt $U_m \setminus \{x\} \subset X \setminus B$. Wegen $x_m \in (U_m \setminus \{x\}) \cap B \neq \emptyset$ Wid!

3. Fall: Es existiert ein $r \in \{1,...n\}$ mit $y = x_{i_r}$. Dann gilt $U_m \setminus \{x\} \subset V_r$. Da $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Mengenfolge ist, gilt $x_s \in U_m \setminus \{x\}$ für alle $s \geq m$. Daraus folgt $x_s \in V_r$ für alle $s \geq m$. Weil V_r aber nur ein Folgenglied - nämlich x_{i_r} - enthält, gilt $x_s = x_{i_r} = x_m$ für alle $s \geq m$. Insbesondere erhalten wir $x_m \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Wegen $x_m \neq x$ existieren Umgebungen $W_x \in \mathring{\underline{U}}(x)$ und $W_m \in \mathring{\underline{U}}(x_m)$ mit $W_x \cap W_m = \emptyset$. Wir definieren eine Abbildung:

$$k': X \longrightarrow \underline{X}$$

$$y \longmapsto \begin{cases} W_m & \text{für } y = x_m \\ W_x & \text{für } y = x \\ X \setminus \{x,x_m\} & \text{für } y \in X \setminus \{x,x_m\} \end{cases}.$$

Es gilt $k' \in \underline{A}_e(x) \subset \underline{A}_b(x) \subset \underline{A}(x)$. Nach Voraussetzung existieren $n \in \mathbb{N}$ und $x' \in X$ mit $U_n \cap f(x) \subset k'(x')$. Wegen $f_3 \leq f$ folgt hieraus $U_n \setminus \{x\} \subset k'(x')$.

1. Fall: $x' = x_m$. Es folgt $U_n \setminus \{x\} \subset W_m$. $W_m \cap W_x = \emptyset$ impliziert $(U_n \setminus \{x\}) \cap W_x = \emptyset$. Dann gilt aber $\{x\} = U_n \cap W_x \in \underline{U}(x)$. Widerspruch zu $\{x\} \notin \underline{X}$.

2. Fall: $x' = x$. Es folgt $U_n \setminus \{x\} \subset W_x$. Wegen $x_m \in U_n \setminus \{x\}$ Widerspruch.

3. Fall: $x' \in X \setminus \{x,x_m\}$. Es folgt $U_n \setminus \{x\} \subset X \setminus \{x,x_m\}$. Wegen $x_m \in U_n \setminus \{x\}$ Wid.

Insgesamt haben wir gezeigt, daß für die Abbildung k kein Paar $(m,y) \in \mathbb{N} \times X$

existieren kann mit $U_m \cap f(x) \subset k(y)$. Dieser Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $(X,\underline{X})$ $(\underline{A},f)$-Raum ist, impliziert, daß B unendlich ist. Damit ist das Lemma bewiesen. Jetzt können wir die Annahme, daß $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht Umgebungsbasis von x ist, zum Widerspruch führen, womit dann auch der Satz bewiesen ist. Und zwar zeigen wir, daß für die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ weder die Aussage '$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent' noch die Aussage '$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht' gilt.

1. Annahme: Es existiert ein $z \in X$ mit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow z$.

Weil O eine Umgebung von x ist, gilt $z \neq x$. Da $(X,\underline{X})$ T_2-Raum ist, finden wir zu jedem $y \in X \setminus \{z\}$ Umgebungen $V_y \in \mathring{\underline{U}}(y)$ und $V_z^y \in \mathring{\underline{U}}(z)$ mit $V_y \cap V_z^y = \emptyset$.

Wir definieren:

$$k: X \longrightarrow \underline{X}$$

$$y \longmapsto \begin{cases} V_y & \text{für } y \neq z \\ V_z^x & \text{für } y = z \end{cases} .$$

Es gilt $k \in \underline{A}_b(x) \subset \underline{A}(x)$, also existieren $n \in \mathbb{N}$ und $y \in X$ mit $U_n \setminus \{x\} \subset k(y)$. Weil V_y und V_z^y disjunkt sind und in V_z^y fast alle Folgenglieder liegen, können in V_y höchstens endlich viele x_n liegen. Dann kann aber $U_n \setminus \{x\} \subset V_y$ nicht gelten, denn in $U_n \setminus \{x\}$ liegen alle x_m mit $m \geq n$. $y = z$ kann jedoch auch nicht gelten, denn aus $U_n \setminus \{x\} \subset V_z^x$ würde (wegen $V_x \cap V_z^x = \emptyset$) $(U_n \setminus \{x\}) \cap V_x = \emptyset$ folgen, und wir bekämen mit $\{x\} = U_n \cap V_x \in \underline{U}(x)$ einen Widerspruch zu $\{x\} \notin \underline{X}$.

2. Annahme: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nicht konvergent.

Dann finden wir zu jedem $z \in X$ eine Umgebung $V_z \in \mathring{\underline{U}}(z)$, die unendlich viele Folgenglieder nicht enthält. Wir definieren:

$$k: X \longrightarrow \underline{X}$$

$$z \longmapsto V_z .$$

Dann gilt $k \in \underline{A}_b(x) \subset \underline{A}(x)$. Nach Voraussetzung existieren $n \in \mathbb{N}$ und $z \in X$ mit $U_n \setminus \{x\} \subset k(z) = V_z$. Da in $U_n \setminus \{x\}$ fast alle Folgenglieder liegen, erhalten wir einen Widerspruch.

1.3.4. Korollar: Es sei $(X,\underline{X})$ ein (b,f_3)-Raum. Dann gilt:

1) $(X,\underline{X})$ T_2-Raum $\Longrightarrow$ $(X,\underline{X})$ kompakt erzeugter Raum .

2) $(X,\underline{X})$ abzählbar kompakter T_2-Raum $\Longrightarrow$ $(X,\underline{X})$ folgenkompakt .

1.3.5. Bemerkungen: (1) Wir haben mit der (b,f_3)-Eigenschaft eine schwächere Bedingung als das 1. Abzählbarkeitsaxiom gefunden, so daß jeder T_2-Raum kompakt erzeugter Raum ist. Daß für den Beweis eine andere Methode erforderlich war als die, die wir von der Implikation:

T_2-Raum und 1. Abzählbarkeitsaxiom $\Longrightarrow$ kompakt erzeugter Raum

her kennen, liegt daran, daß die $(\underline{A},f)$-Eigenschaft - im Gegensatz zum 1. Abzählbarkeitsaxiom - nicht erblich ist.
(Ist die $(\underline{A},f)$-Eigenschaft erblich wenigstens auf abzählbare Unterräume, dann läßt sich die bekannte Beweismethode übertragen.)

(2) Nachdem wir das 1. Abzählbarkeitsaxiom für die Klassen der T_2- und der T_3-Räume charakterisiert haben, behandeln wir nun noch eine Oberklasse der T_3-Räume.

1.3.6. Definition: Nach Marny [Ma] heißt ein topologischer Raum $(X,\underline{X})$ R_{1a}-Raum, wenn jede offene Menge O die Eigenschaft hat:
Je zwei Punkte $x \in O$, $y \notin O$ besitzen disjunkte abgeschlossene Umgebungen.

1.3.7. Bemerkungen: (1) $(X,\underline{X})$ ist genau dann R_{1a}-Raum, wenn je zwei T_0-verschiedene Punkte disjunkte abgeschlossene Umgebungen besitzen.

(2) Ist $(X,\underline{X})$ ein R_{1a}-Raum, dann gilt:

$\bigcap_{U \in \underline{U}(x)} \overline{U} \subset U'$ für alle $x \in X$ und alle $U' \in \underline{U}(x)$.

(3) T_{2a}-Raum $\Longrightarrow$ R_{1a}-Raum .

(4) T_{2a}-Raum $\Longleftrightarrow$ R_{1a}-Raum und T_0-Raum .

(5) T_3-Raum $\Longrightarrow$ R_{1a}-Raum $\Longrightarrow$ R_1-Raum $\Longrightarrow$ R_0-Raum .

1.3.8. Satz: $(X,\underline{X})$ sei ein R_{1a}-Raum, $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung mit $f_3 \in f$ und $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A}_e \subset \underline{A}$. Dann sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist $(\underline{A},f)$-Raum und q-Raum.

2) $(X,\underline{X})$ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis: 2) $\Longrightarrow$ 1): klar.

1) $\Longrightarrow$ 2): Sei $x \in X$. Für $f_3^c(x) = X \setminus f_3(x) = \bigcap_{U \in \underline{U}(x)} \overline{U}$ (vgl. 1.1.12.) gelte: $f_3^c(x) \notin \underline{U}(x)$ (sonst ist $\{f_3^c(x)\}$ nach 1.3.7.(2) die gesuchte abzählbare Umgebungsbasis von x). $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichne die Umgebungsfamilie von x, die durch die q-Eigenschaft von $(X,\underline{X})$ induziert wird; $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine $(\underline{A},f)$-Umgebungsfamilie von x mit $W_m \subset W_n$ für $m \geq n$. Wir setzen $U_n := W_n \cap \bigcap_{k=1}^{n} V_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. O.B.d.A. seien alle U_n offen.

Beh.: $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Umgebungsbasis von x.

Bew. (indirekt): Angenommen, es existiert eine Umgebung $O \in \mathring{\underline{U}}(x)$ mit $U_n \not\subset O$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil $(X,\underline{X})$ R_{1a}-Raum ist, folgt $U_n \cap f_3(x) = U_n \setminus f_3^c(x) \not\subset O$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m \geq n$ mit

$$(U_n \cap f_3(x)) \cap (X \setminus O) \neq (U_m \cap f_3(x)) \cap (X \setminus O) .$$

Beweis (indirekt): Angenommen, es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \geq n$ gilt $(U_n \cap f_3(x)) \cap (X \setminus O) = (U_m \cap f_3(x)) \cap (X \setminus O)$. Es folgt $(U_n \cap f_3(x)) \cap (X \setminus O) \subset \bigcap_{m \geq n} (U_m \cap (X \setminus O)) = (X \setminus O) \cap \bigcap_{m \geq n} U_m$. Wegen $U_n \cap f_3(x) \not\subset O$ existiert $x' \in (U_n \cap f_3(x)) \cap (X \setminus O) \neq \emptyset$. Weil $(X,\underline{X})$ R_{1a}-Raum ist, gibt es Umgebungen $V \in \underline{U}(x)$ und $V' \in \underline{U}(x')$ mit $\overline{V} \cap \overline{V'} = \emptyset$. Wir definieren:

$$k: X \longrightarrow \underline{X}$$

$$y \longmapsto \begin{cases} X \setminus \overline{V} & \text{für } y \in \overline{V'} \\ X \setminus \overline{V'} & \text{für } y \in X \setminus \overline{V'} . \end{cases}$$

Dann gilt $k \in \underline{A}_e(x) \subset \underline{A}(x)$. Nach Voraussetzung existieren $m \in \mathbb{N}$ und $y \in X$ mit $U_m \cap f_3(x) \subset U_m \cap f(x) \subset k(y)$.

1. Fall: $y \in V'$. Es folgt $U_m \cap f_3(x) \cap V = \emptyset$. Wir erhalten mit $U_m \cap V \subset f_3^c(x)$ einen Widerspruch zu $f_3^c(x) \notin \underline{U}(x)$.

2. Fall: $y \in X \setminus \overline{V'}$. Dann folgt $U_m \cap f_3(x) \cap \overline{V'} = \emptyset$. Setzen wir $m' := \max(n,m)$, so gilt auch $U_{m'} \cap f_3(x) \cap \overline{V'} = \emptyset$. Das ist aber ein Widerspruch zu $x' \in U_n \cap f_3(x) \cap V'$.

Damit ist das Lemma bewiesen. Wegen $U_m \subset U_n$ für $m \geq n$ können wir O.B.d.A. annehmen, daß $(U_{n+1} \cap f_3(x)) \cap (X \setminus O) \subsetneq (U_n \cap f_3(x)) \cap (X \setminus O)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen $x_1 \in (U_1 \cap f_3(x)) \cap (X \setminus O)$ und $x_n \in (U_n \cap f_3(x)) \cap (X \setminus O) \cap (X \setminus U_{n-1})$ für

$n \geq 2$. Wir erhalten eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus paarweise verschiedenen Gliedern. Wegen $x_n \in U_n \subset V_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $x_0 \in X$ Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Weil 0 kein Folgenglied enthält, gilt $x' \notin 0$. Also gibt es Umgebungen $V \in \underline{U}(x)$ und $V' \in \underline{U}(x')$ mit $\overline{V} \cap \overline{V'} = \emptyset$. Wir definieren:

$$k: X \longrightarrow \underline{X}$$

$$y \longmapsto \begin{cases} X \setminus \overline{V} & \text{für } y \in \overline{V'} \\ X \setminus \overline{V'} & \text{für } y \in X \setminus \overline{V'} \end{cases} .$$

Dann gilt $k \in \underline{A}_e(x) \subset \underline{A}(x)$. Folglich gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $y \in X$ mit $U_n \cap f_3(x) \subset k(y)$.

1. Fall: $y \in \overline{V'}$. Es folgt $U_n \cap f_3(x) \subset X \setminus \overline{V}$ bzw. $U_n \cap f_3(x) \cap \overline{V} = \emptyset$. Hieraus folgt mit $U_n \cap \overline{V} \subset f_3^c(x)$ ein Widerspruch zu $f_3^c(x) \notin \underline{U}(x)$.

2. Fall: $y \in X \setminus \overline{V'}$. Es folgt $U_n \cap f_3(x) \subset X \setminus \overline{V'}$. Weil in $U_n \cap f_3(x)$ alle Folgenglieder x_m mit $m \geq n$ liegen, V' aber unendlich viele Folgenglieder enthält, folgt ein Widerspruch.

Dieser gesamte Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $(X,\underline{X})$ $(\underline{A},f)$-Raum ist, liefert die Behauptung.

1.3.9. Korollar: Es sei $(X,\underline{X})$ ein R_{1a}-Raum mit der Eigenschaft, daß $\bigcap_{U \in \underline{U}(x)} \overline{U}$ endlich ist für alle $x \in X$. $f: X \longrightarrow 2^X$ sei eine Abbildung mit $f_3 \leq f$. Dann sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom.
2) $(X,\underline{X})$ ist (b,f)-Raum.

Beweis: Satz 1.2.19. und Satz 1.3.8.

1.3.10. Korollar: $(X,\underline{X})$ sei ein R_{1a}-Raum, $f: X \longrightarrow 2^X$ eine Abbildung mit $f_3 \leq f$ und $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A}_e \subset \underline{A}$. Ist $(X,\underline{X})$ $(\underline{A},f)$-Raum, dann sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist abzählbar kompakt.
2) $(X,\underline{X})$ ist folgenkompakt.

Beweis: Trivial unter Verwendung von Satz 1.3.8. und der Tatsache, daß jeder abzählbar kompakte Raum auch q-Raum ist.

1.3.11. Bemerkungen: (1) Ein regulärer q-Raum erfüllt das 1. Abzählbarkeitsaxiom, wenn er E_0-Raum ist. (E_0-Raum: Jeder Punkt ist G_δ-Punkt)
Satz 1.3.8. besagt, daß ein R_{1a}-q-Raum das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, wenn er (e,f_3)-Raum ist.

(2) Definieren wir für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ $B(x,\frac{1}{n}) := \{x\} \cup \{y \,/\, y \in \mathbb{Q}, \, |y - x| < \frac{1}{n}\}$ sowie $\underline{U}(x) := \{A \,/\, A \subset \mathbb{R}$, es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $B(x,\frac{1}{n}) \subset A\}$, und setzen wir für alle $x \in \mathbb{Q}$ $\underline{U}(x) := \{A \,/\, A \subset \mathbb{R}, \, x \in A\}$, dann ist $\underline{U}(x)$ ein vollständiges Umgebungssytem auf X für alle $x \in \mathbb{R}$. Für die induzierte Topologie $\underline{\mathbb{R}}$ gilt: $(\mathbb{R},\underline{\mathbb{R}})$ ist T_{2a}-Raum, aber nicht T_3-Raum. Bezeichnet I_2 den zweipunktigen indiskreten Raum, dann ist $X := (\mathbb{R},\underline{\mathbb{R}}) \times I_2$ ein R_{1a}-Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und für den $\mathrm{Card}(\bigcap_{U \in \underline{U}(x)} \overline{U}) = 2 < \aleph_0$ gilt für alle $x \in X$.
Da X weder T_2- noch T_3-Raum ist, zeigt dieses Beispiel, daß Korollar 1.3.9. weder aus Satz 1.3.3. noch aus Satz 1.3.1. gefolgert werden kann.

(3) Korollar 1.3.10. besagt, daß in der Klasse der R_{1a}-Räume jeder abzählbar kompakte Raum bereits dann folgenkompakt ist, wenn er (e,f_3)-Raum ist. Dieses Resultat ist eine Verallgemeinerung von 1.3.2.(b).

(4) Die nachfolgenden Kapitel 2 und 3 dienen dazu, Hilfsmittel bereitzustellen, um später (in Kapitel 4) eine Zwischenklasse zwischen den Klassen der folgenkompakten und der abzählbar kompakten Räume angeben zu können, die alle abzählbar kompakten $(\underline{A},f)$-Räume (für spezielle Mengen $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ und Abbildungen $f: X \longrightarrow 2^X$) enthält.

Kapitel 2: Verallgemeinerungen der Folgenkompaktheit

Für die Konstruktion von Zwischenklassen zwischen den folgenkompakten und den abzählbar kompakten Räumen benötigen wir Oberbegriffe der Folgenkompaktheit. Wir erzeugen diese, indem wir den Begriff der Folgenkonvergenz geeignet abschwächen.

Um unsere Aussagen nicht unnötig einzuschränken, gehen wir - wie in Kapitel 1 - wieder von beliebigen Teilmengen $\underline{A}$ von $\underline{X}^X$ aus.

2.1. $\underline{A}$-sternfolgenkompakte und $\underline{A}$-δ-sternfolgenkompakte Räume

2.1.1. Definitionen: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum, $\underline{A} \subset \underline{X}^X$.

a) Für eine Abbildung $k: X \longrightarrow \underline{X}$ sei

$St(\cdot,k): X \longrightarrow \underline{X}$ definiert durch

$$x \longmapsto St(x,k) := \bigcup \{k(x') \,/\, x' \in X \text{ mit } x \in k(x')\}.$$

b) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt:

(1) $\underline{A}$-Sternfolge, wenn zu jedem $k \in \underline{A}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$E_{n_k} \subset St(x_{n_k},k).$$

(2) $\underline{A}$-δ-Sternfolge, wenn zu jedem $k \in \underline{A}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$E_{n_k} \subset \bigcap_{n \geq n_k} St(x_n,k).$$

c) $(X,\underline{X})$ heißt $\underline{A}$-sternfolgenkompakt ($\underline{A}$-δ-sternfolgenkompakt), wenn jede Folge in X eine $\underline{A}$-Stern-($\underline{A}$-δ-Stern-)Teilfolge besitzt.

2.1.2. Bemerkungen: (1) $E_{n_k} := \{x_n \,/\, n \geq n_k\}$ ('Endstück' der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

(2) Für $k \in \underline{A}_b$ ist $St(\tilde{x},k)$ gerade der zu der Überdeckung $(k(x))_{x \in X}$ gehörende Stern von $\tilde{x} \in X$.

(3) Für $k \in \underline{A}_c$ und $\tilde{x} \in X$ gilt:

$$St(\tilde{x},k) = \begin{cases} k(x) \text{ für } \tilde{x} \in k(x) (= \text{const}) \\ \emptyset \quad \text{sonst} . \end{cases}$$

Insbesondere gilt $St(\cdot,k) \in k$.

(4) Für $i \in \{e,a,p,l,b,c\}$ schreiben wir statt $\underline{A}_i$-Sternfolge ($\underline{A}_i$-δ-Sternfolge) kurz i-Sternfolge (i-δ-Sternfolge).

2.1.3. Lemma: $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum, $k: X \longrightarrow \underline{X}$ eine Abbildung.

1) $St(\cdot,k)$ ist symmetrisch, d.h. $y \in St(x,k) \iff x \in St(y,k)$.

2) $k \in \underline{A}_b \Longrightarrow St(\cdot,k)$ reflexiv .

3) k reflexiv $\Longrightarrow k \leq St(\cdot,k)$.

4) $k': X \longrightarrow \underline{X}$ Abbildung mit $k \leq k'$, dann gilt:
$St(\cdot,k) \leq St(\cdot,k')$.

5) Existiert ein $x_k \in X$ mit $k(x_k) = X$, dann gilt $St(x,k) = X$ für alle $x \in X$.

2.1.4. Lemma: $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum, $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A} \subset \underline{A}_b$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann impliziert jede der folgenden Bedingungen die nächst folgende:

1) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.

2) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist $\underline{A}$-δ-Sternfolge.

3) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist $\underline{A}$-Sternfolge.

Korollar: folgenkompakt $\Longrightarrow$ $\underline{A}$-δ-sternfolgenkompakt $\Longrightarrow$ $\underline{A}$-sternfolgenkompakt .

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): Ist x_o Limes der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $k \in \underline{A} \subset \underline{A}_b$ beliebig, dann existiert $x' \in X$ mit $x_o \in k(x') \in \overline{\underline{U}}(x_o)$. Also finden wir eine Zahl $n_k \in \mathbb{N}$ mit $E_{n_k} \subset k(x')$. Trivialerweise folgt $E_{n_k} \subset \bigcap_{n \geq n_k} St(x_n,k)$.
2) $\Longrightarrow$ 3): trivial.

2.1.5. Definition: $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum, $\underline{A} \subset \underline{X}^X$.
$(X,\underline{X})$ heißt $\underline{A}$-vollnormal, wenn zu jedem $k \in \underline{A}$ ein $k' \in \underline{A}$ existiert, so daß $(St(x,k'))_{x \in X}$ eine Verfeinerung von $(k(x))_{x \in X}$ ist (d.h. wenn zu jedem $x \in X$ ein $x' \in X$ existiert mit $St(x,k') \subset k(x')$).

2.1.6. Bemerkungen: (1) Nach 2.1.2.(3) ist jeder topologische Raum c-vollnormal.

(2) Die Beziehung zu den vollnormalen topologischen Räumen (das sind die Räume, in denen jede offene Überdeckung eine offene baryzentrische Verfeinerung besitzt) stellt der nachfolgende Satz her.

2.1.7. Satz: Für einen topologischen Raum $(X,\underline{X})$ sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist vollnormal.

2) $(X,\underline{X})$ ist b-vollnormal.

Beweis: Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X existiert eine Wohlordnung $\leq$ auf I. Setzen wir $i_x := \min\{i \in I \,/\, x \in U_i\}$ für alle $x \in X$, dann ist:

$$k_{\mathcal{U}}: X \longrightarrow \underline{X}$$
$$x \longmapsto U_{i_x}$$

eine wohldefinierte Abbildung mit $k_{\mathcal{U}} \in \underline{A}_b$. Wegen $St(x,k_{\mathcal{U}}) \subset St(x,\mathcal{U})$ für alle $x \in X$ folgt aus der Vollnormalität von $(X,\underline{X})$ sofort die b-Vollnormalität von $(X,\underline{X})$. Ist umgekehrt $k \in \underline{A}_b$, dann gilt für $\mathcal{U} = (k(x))_{x \in X}$ nach 2.1.2.(2) $St(x,k) = St(x,\mathcal{U})$ für alle $x \in X$. Also gilt auch die Rückrichtung.

2.1.8. Satz: $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum, $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A}_e \subset \underline{A} \subset \underline{A}_b$. Es gilt:

$$(X,\underline{X}) \text{ ist kompakt} \Longrightarrow (X,\underline{X}) \text{ ist } \underline{A}\text{-vollnormal} .$$

Beweis: Sei $k \in \underline{A}$.

1. Fall: Card $X < \aleph_o$. Da $(X,\underline{X})$ kompakt ist, ist $(X,\underline{X})$ diskret. Dann ist

$$k': X \longrightarrow \underline{X}$$
$$x \longmapsto \{x\}$$

wohldefiniert, und es gilt $k' \in \underline{A}_e$. Wegen $k \in \underline{A}_b$ und $St(x,k') = \{x\}$ für alle $x \in X$ ist $(St(x,k'))_{x \in X}$ trivialerweise eine Verfeinerung von $(k(x))_{x \in X}$.

2. Fall: Card $X \geq \aleph_o$. Die offene Überdeckung $(k(x))_{x \in X}$ besitzt nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung. Also existiert $E \subset X$ endlich mit $\bigcup_{x \in E} k(x) = X$. Weil $(X,\underline{X})$ insbesondere normal ist, besitzt die punktendliche offene Überdeckung $(k(x))_{x \in E}$ eine Schrumpfung $(V_x)_{x \in E}$. Es ist also $\overline{V}_x \subset k(x)$ für alle $x \in E$. Für $I \subset E$ sei:

$$N(I) := \bigcap \{k(x) \,/\, x \in I\} \cap \bigcap \{X \setminus \overline{V}_x \,/\, x \in E \setminus I\}.$$

Wegen Card $X \geq \aleph_o >$ Card 2^E existiert eine injektive Abbildung

$$w: 2^E \longrightarrow X .$$

Wir definieren $k' : X \longrightarrow \underline{X}$

$$x \longmapsto \begin{cases} N(I) & \text{falls } x = w(I) \\ \emptyset & \text{falls } x \in X \setminus w(\underline{P}(E)) \,. \end{cases}$$

k' ist wohldefiniert, weil w injektiv ist. Da $\underline{P}(E)$ endlich ist, ist auch $\{k'(x) \,/\, x \in X\}$ endlich. Ist $x_o \in X$, dann gilt $x_o \in N(I)$ für $I := \{x \in E \,/\, x_o \in \overline{V}_x\}$. Also gilt $k' \in \underline{A}_e$. Wir müssen zeigen, daß $(St(x,k'))_{x \in X}$ eine Verfeinerung von $(k(x))_{x \in X}$ ist. Sei hierzu $x_o \in X$. Weil $(V_x)_{x \in E}$ eine Überdeckung von X ist, existiert ein $x \in E$ mit $x_o \in V_x$.

Beh.: $St(x_o,k') \subset k(x)$.

Bew.: Sei $y \in St(x_o,k')$. Dann existiert ein $x' \in X$ mit $x_o, y \in k'(x') \neq \emptyset$. Folglich gibt es eine Teilmenge I von E mit $x_o, y \in N(I) = k'(x')$. Es folgt $x \in I$ (wäre $x \in E \setminus I$, dann bekämen wir mit $x_o \in X \setminus \overline{V}_x$ einen Widerspruch) und schließlich $y \in k(x)$. qed.

2.1.9 Satz: (X,$\underline{X}$) sei ein topologischer Raum, $\underline{A} \subset \underline{X}^X$. Ist (X,$\underline{X}$) $\underline{A}$-vollnormal, dann sind äquivalent:

1) (X,$\underline{X}$) ist $\underline{A}$-sternfolgenkompakt.
2) (X,$\underline{X}$) ist $\underline{A}$-δ-sternfolgenkompakt.

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): Wir zeigen, daß in $\underline{A}$-vollnormalen Räumen jede $\underline{A}$-Sternfolge auch $\underline{A}$-δ-Sternfolge ist. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\underline{A}$-Sternfolge und $k \in \underline{A}$. Nach Voraussetzung existiert $k' \in \underline{A}$, so daß $(St(x,k'))_{x \in X}$ das Mengensystem $(k(x))_{x \in X}$ verfeinert. Weil $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\underline{A}$-Sternfolge ist, finden wir ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $E_{n_k} \subset St(x_{n_k},k')$. Zu zeigen: $E_{n_k} \subset \bigcap_{n \geq n_k} St(x_n,k)$. Seien also $n,m \in \mathbb{N}$ mit $n,m \geq n_k$. Weil (X,$\underline{X}$) $\underline{A}$-vollnormal ist, existiert ein $x' \in X$ mit $St(x_{n_k},k') \subset k(x')$. Es folgt $x_n, x_m \in E_{n_k} \subset St(x_{n_k},k') \subset k(x')$ und schließlich $x_m \in St(x_n,k)$. qed.

2) $\Longrightarrow$ 1): klar.

Bemerkung: Die Tatsache, daß in $\underline{A}$-vollnormalen Räumen jedes $k \in \underline{A}$ eine baryzentrische Verfeinerung besitzt, wollen wir nun dazu benutzen, zu zeigen, daß jedem $\underline{A}$-vollnormalen Raum bereits eine Uniformität zugeordnet werden kann.

2.1.10. Definition: $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum.

$\underline{A} \subset \underline{X}^X$ hat endliche Durchschnittseigenschaft (ede), wenn zu je endlich vielen $k_1,\ldots k_n \in \underline{A}$ ein $k \in \underline{A}$ existiert, so daß für alle $x \in X$ eine endliche Teilmenge $\{x_1,\ldots x_n\}$ von X existiert mit $k(x) \subset \bigcap_{i=1}^{n} k_i(x_i)$.

2.1.11. Bemerkungen: (1) $\underline{A}$ hat genau dann ede, wenn für jede endliche Teilmenge $\{k_1,\ldots k_n\}$ von $\underline{A}$ ein $k \in \underline{A}$ existiert, so daß das System $(k(x))_{x \in X}$ alle Systeme $(k_i(x))_{x \in X}$ $(i = 1,\ldots,n)$ verfeinert.

(2) Enthält $\underline{A}$ die Abbildung $k_\emptyset$ $(x \longmapsto \emptyset$ für alle $x \in X)$, dann besitzt $\underline{A}$ die ede.

(3) $\underline{A}_e$, $\underline{A}_p$, $\underline{A}_l$, $\underline{A}_a$, $\underline{A}_b$ und $\underline{A}_c$ haben die ede.

2.1.12. Satz: $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum, $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit ede und $\underline{A}_e \subset \underline{A} \subset \underline{A}_b$. Ist $(X,\underline{X})$ $\underline{A}$-vollnormal, dann gilt:

1) $\{W_k := \bigcup_{x \in X} k(x) \times k(x) \;/\; k \in \underline{A}\}$ ist Basis einer Uniformität $\underline{W}_{\underline{A}}$ auf X.

2) Für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X sind äquivalent:

   (a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist $\underline{A}$-Sternfolge

   (b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist $\underline{A}$-δ-Sternfolge

   (c) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $(X,\underline{W}_{\underline{A}})$.

3) $\underline{X}_{\underline{A}} := \{O \subset X \;/$ für alle $x \in X$ existiert ein $k \in \underline{A}$ mit $W_k(x) \subset O\}$ ist eine Topologie auf X mit $\underline{X}_{\underline{A}} \subset \underline{X}$.

4) Es sind äquivalent:

   (a) $(X,\underline{X})$ ist R_0-Raum.

   (b) $\underline{X}_{\underline{A}} = \underline{X}$.

Korollar: Ein $\underline{A}$-vollnormaler Raum $(X,\underline{X})$ (für $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit ede und $\underline{A}_e \subset \underline{A} \subset \underline{A}_b$) ist genau dann uniformisierbar, wenn er R_0-Raum ist.

Beweis: Zu (1): $\underline{A}$ ist eine Familie von Überdeckungen von X mit:

(a) Zu je zwei Überdeckungen $k_1,k_2 \in \underline{A}$ existiert eine gemeinsame Verfeinerung ($\underline{A}$ hat ede).

(b) Jedes $k \in \underline{A}$ besitzt eine baryzentrische Verfeinerung (X ist $\underline{A}$-vollnormal).

Also ist $\underline{A}$ eine uniformisierende Familie und $\{W_k / k \in \underline{A}\}$ Basis einer Uniformität auf X.

Zu (2) (a) $\Longleftrightarrow$ (b): Satz 2.1.8.

(b) $\Longleftrightarrow$ (c): Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Da für $k \in \underline{A}$ und $n_k \in \mathbb{N}$ die Aussagen $E_{n_k} \subset \bigcap_{n \geq n_k} St(x_n,k)$ und $E_{n_k} \times E_{n_k} \subset W_k$ äquivalent sind, sind auch (b) und (c) äquivalent. (Weil hier nur die spezielle Form der Mengen W_k eingeht, sind (b) und (c) auch dann äquivalent, wenn $(X,\underline{X})$ nicht $\underline{A}$-vollnormal ist.)

Zu (3): Da $\underline{W}_{\underline{A}}$ ein Filter auf X ist, ist $\underline{X}_{\underline{A}}$ eine Topologie auf X.

$\underline{X}_{\underline{A}} \subset \underline{X}$ gilt, weil $W_k(x) = St(x,k)$ eine offene Umgebung von $x \in X$ ist.

Zu (4) (a) $\Longrightarrow$ (b): Sei $O \in \underline{X}$ und $x \in O$. Weil $(X,\underline{X})$ R_0-Raum ist, gilt $\overline{\{x\}} \subset O$.

$k: X \longrightarrow \underline{X}$ sei definiert durch

$$y \longmapsto \begin{cases} O & \text{für } y \in O \\ X \setminus \overline{\{x\}} & \text{für } y \in X \setminus O \end{cases} .$$

Dann gilt $k \in \underline{A}_e \subset \underline{A}$. Wegen $x \in W_k(x) = O$ ist O offen in $(X,\underline{X}_{\underline{A}})$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Sei $O \in \underline{X}$, $x \in O$. Wegen $O \in \underline{X}_{\underline{A}}$ existiert ein $k \in \underline{A}$ mit $W_k(x) \subset O$. Zu zeigen $\overline{\{x\}} \subset O$. Sei $y \in \overline{\{x\}}$. $k \in \underline{A} \subset \underline{A}_b$ impliziert die Existenz eines Punktes $z \in X$ mit $y \in k(z) \in \underline{\overline{U}}(y)$. Es folgt $k(z) \cap \{x\} \neq \emptyset$, also $x \in k(z)$. Insgesamt erhalten wir $(x,y) \in k(z) \times k(z) \subset W_k$, woraus schließlich $y \in W_k(x) \subset O$ folgt. qed.

2.1.13. Bemerkungen: (1) Für jeden e-vollnormalen Raum $(X,\underline{X})$ ist $\underline{W}_{\underline{A}_e}$ eine total beschränkte Uniformität auf X.

(2) Ist $(X,\underline{X})$ kompakt, dann ist $\underline{W}_{\underline{A}}$ für alle $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit ede und $\underline{A}_e \subset \underline{A} \subset \underline{A}_b$ identisch mit dem Umgebungssystem $\underline{U}(\Delta)$ der Diagonalen Δ von $X \times X$. Insbesondere ist $(X,\underline{W}_{\underline{A}})$ vollständig.

(3) Ist $(X,\underline{X})$ uniformisierbar (mit $\underline{W}$ als verträgliche Uniformität), dann ist jede b-δ-Sternfolge in $(X,\underline{X})$ Cauchy-Folge in $(X,\underline{W})$.

(4) Definieren wir für einen topologischen Raum $(X,\underline{X})$ und jede Abbildung $k: X \longrightarrow \underline{X}$ $St(B,k) := \bigcup \{St(x,k) / x \in B\}$ für alle $B \subset X$, dann gilt $St(\{x\},k) = St(x,k)$ für alle $x \in X$ und $St(St(B,k),k) = St(B,St(\cdot,k))$ für alle $B \subset X$. Ist $(X,\underline{X})$ $\underline{A}$-vollnormal für $\underline{A} \subset \underline{A}_b$ mit ede, dann gilt für die

von der Uniformität $\underline{W}_{\underline{A}}$ induzierte Proximität $\delta(\underline{W}_{\underline{A}})$

$$(B,C)\in \delta(\underline{W}_{\underline{A}}) \iff St(B,k)\cap St(C,k) \neq \emptyset \text{ für alle } k\in\underline{A} .$$

Die p-Umgebungen (Smirnov) bez. $\delta(\underline{W}_{\underline{A}})$ genügen der Äquivalenz:

$$B\in C \iff \text{Es existiert } k\in\underline{A} \text{ mit } St(St(B,k),k)\subset C .$$

Die von $\delta(\underline{W}_{\underline{A}})$ induzierte total beschränkte Uniformität $\underline{W}_{\delta(\underline{W}_{\underline{A}})}$ besitzt die Darstellung:

$$\underline{W}_{\delta(\underline{W}_{\underline{A}})} = (\{ \bigcup_{i=1}^{n} St^2(B_i,k) \times St^2(B_i,k) \;/\; n\in\mathbb{N},\ B_i\subset X \text{ mit } \bigcup_{i=1}^{n} B_i = X,\ k\in\underline{A}\}).$$

(Wir haben zur Abkürzung $St^2(B_i,k)$ für $St(St(B_i,k),k)$ gesetzt.)

2.1.14. Satz: $(X,\underline{X})$ sei ein e-vollnormaler Raum, $\underline{A}\subset \underline{X}^X$ mit ede und $\underline{A}_e\subset\underline{A}\subset\underline{A}_b$. Ist $(X,\underline{X})$ $\underline{A}$-vollnormal, dann gilt:

$$\underline{W}_{\delta(\underline{W}_{\underline{A}})} = \underline{W}_{\underline{A}_e} .$$

Beweis: Da die Proximitätsklasse bez. einer Proximität δ genau eine total beschränkte Uniformität enthält (vgl. Preuß [Pr] Satz 10.2.6.), reicht es zu zeigen, daß die total beschränkten Uniformitäten $\underline{W}_{\underline{A}_e}$ und $\underline{W}_{\delta(\underline{W}_{\underline{A}})}$ beide in der Proximitätsklasse bez. $\delta(\underline{W}_{\underline{A}})$ liegen. Dazu müssen wir zeigen, daß $\delta(\underline{W}_{\delta(\underline{W}_{\underline{A}})}) = \delta(\underline{W}_{\underline{A}}) = \delta(\underline{W}_{\underline{A}_e})$ gilt. Da die Uniformität $\underline{W}_{\delta(\underline{W}_{\underline{A}})}$ gerade so konstruiert ist, daß $\delta(\underline{W}_{\delta(\underline{W}_{\underline{A}})}) = \delta(\underline{W}_{\underline{A}})$ gilt, und weil aus $\underline{A}_e\subset\underline{A}$ trivialerweise $\delta(\underline{W}_{\underline{A}})\subset\delta(\underline{W}_{\underline{A}_e})$ folgt, brauchen wir nur noch $\delta(\underline{W}_{\underline{A}_e})\subset\delta(\underline{W}_{\underline{A}})$ zu zeigen.

Beh.: $\delta(\underline{W}_{\underline{A}_e})\subset\delta(\underline{W}_{\delta(\underline{W}_{\underline{A}})})$.

Bew.: Seien $B, C\subset X$ mit $(B,C)\in\delta(\underline{W}_{\underline{A}_e})$. Dann müssen wir für alle $V\in\underline{W}_{\delta(\underline{W}_{\underline{A}})}$ zeigen, daß $V[B]\cap V[C] \neq \emptyset$ gilt. Sei also $V\in\underline{W}_{\delta(\underline{W}_{\underline{A}})}$. Dann existieren $B_i\subset X$ $(i = 1,\ldots n)$ mit $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = X$ und $k\in\underline{A}$, so daß gilt

$$V = \bigcup_{i=1}^{n} St^2(B_i,k)\times St^2(B_i,k) .$$

Die gleichmäßigen Umgebungen bez. V haben dann die Darstellung $V[D] = \cup\{St^2(B_i,k) \;/\; D\cap St^2(B_i,k)\neq\emptyset\}$ für $D\subset X$. Wir wählen jetzt $x_1\in X$ und $x_i\in X\setminus\{x_1,\ldots x_{i-1}\}$ für $i = 2,\ldots n$ (ist X endlich, dann gilt wegen $\underline{A}_e = \underline{A}$ bereits $\delta(\underline{W}_{\underline{A}_e}) = \delta(\underline{W}_{\underline{A}})$) und definieren:

$$k': X \longrightarrow \underline{X}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} St(B_i,k) & x = x_i \\ \emptyset & x\in X\setminus\{x_1,\ldots x_n\}. \end{cases}$$

Da $B_i \subset St(B_i,k) \in \underline{X}$ gilt für alle $i \in \{1,\ldots n\}$, gehört k' zu $\underline{A}_e$. Wegen $(B,C) \in \delta(\underline{W}_{\underline{A}_e})$ existiert ein $x \in St(B,k') \cap St(C,k') \neq \emptyset$. Dann finden wir Punkte $b \in B$, $c \in C$ mit $x \in St(b,k') \cap St(c,k')$. Also gibt es i, $j \in \{1,\ldots n\}$ mit $x, b \in k'(x_i)$ und $x, c \in k'(x_j)$. Folglich gilt $x, b \in St(B_i,k)$ und $x, c \in St(B_j,k)$. Nun existieren $b_i \in B_i$ und $b_j \in B_j$ mit $x \in St(b_i,k) \cap St(b_j,k)$ sowie $\bar{b}_i \in B_i$ und $\bar{b}_j \in B_j$ mit $b \in St(\bar{b}_i,k)$ und $c \in St(\bar{b}_j,k)$. Unter Beachtung von $St(a,St(\cdot,k)) \subset St(A,St(\cdot,k)) = St^2(A,k)$ für alle $A \subset X$ und alle $a \in A$ gilt:

(1) $x \in St^2(B_i,k)$ (wegen $x, b_i \in St(b_i,k)$)

(2) $x \in St^2(B_j,k)$ (wegen $x, b_j \in St(b_j,k)$)

(3) $b \in St^2(B_i,k)$ (wegen $b, \bar{b}_i \in St(\bar{b}_i,k)$)

(4) $c \in St^2(B_j,k)$ (wegen $c, \bar{b}_j \in St(\bar{b}_j,k)$) .

Es folgt $b \in St^2(B_i,k) \cap B$ und $c \in St^2(B_j,k) \cap C$. $x \in St^2(B_i,k) \cap St(B_j,k)$ impliziert schließlich $x \in V[B] \cap V[C] \neq \emptyset$. qed.

2.2. Sternfolgenkompaktheit und verwandte Begriffe

Der im vorigen Abschnitt eingeführte Begriff $\underline{A}$-sternfolgenkompakt, der - wie wir gesehen haben - eine Verallgemeinerung des Begriffs folgenkompakt darstellt, wird in die Reihe der bekannten Kompaktheitsbegriffe eingeordnet. Anschließend werden die Räume charakterisiert, die zugleich kompakt und folgenkompakt sind. Zum Schluß wird gezeigt, daß in der Klasse der T_{2a}-Räume die Begriffe folgenkompakt und b-δ-sternfolgenkompakt zusammenfallen.

2.2.1. Satz: Jeder b-sternfolgenkompakte Raum ist BW-kompakt.

Beweis: Es sei $(X,\underline{X})$ ein b-sternfolgenkompakter Raum und B eine unendliche Teilmenge von X. Angenommen, B besitzt keinen Häufungspunkt. Dann gilt $B = \bar{B}$. Außerdem existiert zu jedem $x \in B$ eine offene Umgebung $O_x \in \mathring{\underline{U}}(x)$ mit $B \cap O_x = \{x\}$. Wir definieren:

$$k: X \longrightarrow \underline{X}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} O_x & \text{für } x \in B \\ X \setminus B & \text{für } x \in X \setminus B \end{cases} .$$

Es gilt $k \in \underline{A}_b$. Wir wählen nun $x_1 \in B$ und $x_n \in B \setminus \{x_1, \ldots x_{n-1}\}$ für $n > 1$. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt nach Voraussetzung eine b-Stern-Teilfolge $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Also existiert ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $E_{j_{n'}} \subset St(x_{j_{n'}}, k)$. Ist $n > n'$, so müßte ein $x \in X$ existieren mit $x_{j_n}, x_{j_{n'}} \in k(x)$. Da $k(x)$ aber höchstens ein Folgenglied enthält und alle Folgenglieder paarweise verschieden sind, folgt ein Widerspruch.

2.2.2. Bemerkung: Aus Satz 2.2.1 folgt, daß jeder b-sternfolgenkompakte T_1-Raum abzählbar kompakt ist. Das ist bemerkenswert in Hinblick darauf, daß ein b-δ-sternfolgenkompakter Raum nicht abzählbar kompakt zu sein braucht: Jede vollständig geordnete Menge $(X, \leq)$ versehen mit der Linkstopologie $\underline{X}_L$ (Rechtstopologie) ist b-δ-sternfolgenkompakt; $(\mathbb{R}, \underline{\mathbb{R}}_L)$ beispielsweise ist nicht abzählbar kompakt.

2.2.3. Satz: $(X, \underline{X})$ sei ein topologischer Raum, $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A}_a \cap \underline{A}_p \subset \underline{A}$.
Ist $(X, \underline{X})$ $\underline{A}$-sternfolgenkompakt, dann besitzt jede abzählbare punktendliche offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung.

Beweis: Es sei $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktendliche offene Überdeckung von X. Angenommen, $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt keine endliche Teilüberdeckung. Es folgt Card $X \geq \aleph_0$. O.B.d.A. gelte $O_n \neq O_m$ für $n \neq m$. Wir wählen $x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} O_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt nach Voraussetzung eine $\underline{A}$-Stern-Teilfolge $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Durch $k(x) := \bigcap \{O_n \mid x \in O_n, n \in \mathbb{N}\}$ für alle $x \in X$ wird eine Abbildung k von X in $\underline{X}$ definiert, für die offensichtlich $k \in \underline{A}$ gilt. Weil $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\underline{A}$-Sternfolge ist, existiert ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $E_{j_{n'}} \subset St(x_{j_{n'}}, k)$. Sei $i_{n'} \in \mathbb{N}$ mit $x_{j_{n'}} \in O_{i_{n'}}$. Dann gilt $j_{n'} < i_{n'}$. (Wäre $j_{n'} \geq i_{n'}$, so bekämen wir mit $x_{j_{n'}} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{i_{n'}} O_i \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^{i_{n'}} O_i$ einen Widerspruch zu $x_{j_{n'}} \in O_{i_{n'}}$.)
Zu $i_{n'} \in \mathbb{N}$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $j_{n_1} \geq i_{n'}$. Wegen $i_{n'} > j_{n'}$ folgt $n_1 > n'$. Also gibt es $x^1 \in X$ mit $x_{j_{n'}}, x_{j_{n_1}} \in k(x^1)$. Folglich finden wir ein $i_{n_1} \in \mathbb{N}$ mit $x_{j_{n'}}, x_{j_{n_1}} \in O_{i_{n_1}}$. Es gilt $j_{n_1} < i_{n_1}$ (sonst wäre $x_{j_n} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{i_{n_1}} O_i \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^{i_{n_1}} O_i$, also $x_{j_{n_1}} \notin O_{i_{n_1}}$). Zu i_{n_1} existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $j_{n_2} \geq i_{n_1}$. Wegen $i_{n_1} > j_{n_1}$ gilt $n_2 > n_1 > n'$, also gibt es ein $x^2 \in X$ mit $x_{j_{n'}}, x_{j_{n_2}} \in k(x^2)$. Folglich finden wir

$i_{n_2} \in \mathbb{N}$ mit $x_{j_{n'}}, x_{j_{n_2}} \in O_{i_{n_2}}$. Es folgt - analog wie oben - $j_{n_2} < i_{n_2}$. Induktiv erhalten wir eine Folge $(i_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $j_{n'} < i_{n'} \leq j_{n_1} < i_{n_1} \leq j_{n_2} < i_{n_2} \leq \ldots$ und $x_{j_{n'}} \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} O_{i_{n_k}}$. Da alle O_i paarweise verschieden gewählt sind und $(i_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ streng monoton ist, folgt ein Widerspruch zur Punktendlichkeit von $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

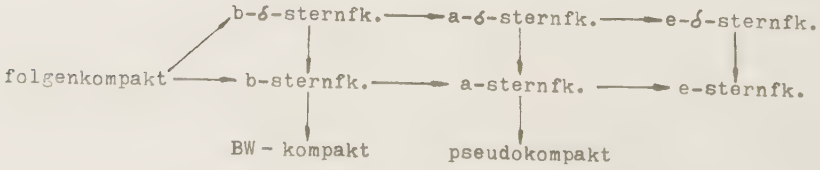
2.2.4. Korollar: Jeder a-sternfolgenkompakte (p-sternfolgenkompakte) Raum ist pseudokompakt.

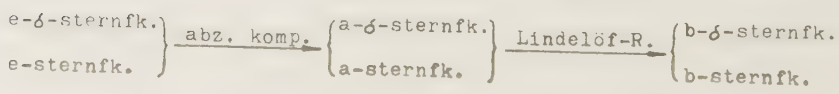
Beweis: Ist $(X,\underline{X})$ a-sternfolgenkompakt (p-sternfolgenkompakt) und $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist $(f^{-1}[(n-1,n+1)])_{n \in \mathbb{N}}$ eine punktendliche offene Überdeckung von X, die nach 2.2.3 eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Also existieren $n_1, \ldots n_k \in \mathbb{N}$ mit $X = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}[(n_i-1,n_i+1)]$. Setzen wir $n^+ := \max\{n_1, \ldots n_k\}$ und $n^- := \min\{n_1, \ldots n_k\}$, so gilt $n^- - 1 < f(x) < n^+ + 1$ für alle $x \in X$, also ist f beschränkt.

2.2.5. Bemerkungen: (1) Da ein regulärer Raum genau dann abzählbar kompakt ist, wenn jede abzählbare punktendliche offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt, gilt:

a-sternfolgenkompakt $\xrightarrow{\text{regulär}}$ abzählbar kompakt

(2) Es gelten folgende Beziehungen:





2.2.6. Satz: $(X,\underline{X})$ sei ein T_2-Lindelöf-Raum, $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A}_a \subset \underline{A} \subset \underline{A}_b$.

Es sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist kompakt und folgenkompakt.

2) $(X,\underline{X})$ ist $\underline{A}$-δ-sternfolgenkompakt.

3) $(X,\underline{X})$ ist $\underline{A}$-sternfolgenkompakt.

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3): klar.

3) $\Longrightarrow$ 1): Nach 2.2.5.(2) ist $(X,\underline{X})$ als a-sternfolgenkompakter Lindelöf-Raum b-sternfolgenkompakt. Da jeder b-sternfolgenkompakte Raum BW-kompakt ist (Satz 2.2.1), ist $(X,\underline{X})$ als T_2-Lindelöf-Raum kompakt. Zu zeigen bleibt, daß $(X,\underline{X})$ folgenkompakt ist. Da jeder kompakte Raum b-vollnormal ist (Satz 2.1.8), ist $(X,\underline{X})$ b-δ-sternfolgenkompakt (Satz 2.1.9). Als kompakter Raum besitzt $(X,\underline{X})$ eine verträgliche vollständige Uniformität $\underline{W}$. (Es ist dies gerade das Umgebungssystem der Diagonalen Δ von $X \times X$.) Ist jetzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X, so existiert eine b-δ-Stern-Teilfolge $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Nach 2.1.13.(3) ist $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $(X,\underline{W})$, also konvergent. qed.

2.2.7. Satz: Für einen T_{2a}-Raum $(X,\underline{X})$ sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist folgenkompakt.

2) $(X,\underline{X})$ ist b-δ-sternfolgenkompakt.

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): klar.

2) $\Longrightarrow$ 1)(indirekt): Angenommen, es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Nach Voraussetzung gibt es eine b-δ-Stern-Teilfolge $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$, die - weil X als b-$\delta$-sternfolgenkompakter T_{2a}-Raum auch abzählbar kompakt ist - einen Häufungspunkt $x \in X$ besitzt. Da die Folge $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ insbesondere nicht gegen x konvergiert, finden wir eine offene Umgebung $U \in \mathring{\underline{U}}(x)$ derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m(n) \geq n$ existiert mit $x_{j_{m(n)}} \notin U$. $(x_{j_{m(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$ ist dann eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die einen Häufungspunkt $x' \in X$ besitzt. Es gilt $x \neq x'$ (wegen $\{x_{j_{m(n)}} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X \setminus U = \overline{X \setminus U}$ gilt sogar $x' \in X \setminus U$). Weil X T_{2a}-Raum ist, gibt es Umgebungen $V \in \underline{U}(x)$

und $V' \in \underline{U}(x')$ mit $\overline{V} \cap \overline{V}' = \emptyset$. Wir definieren:

$$k: X \longrightarrow \underline{X}$$

$$x \longrightarrow \begin{cases} X \setminus \overline{V} & \text{für } x \in X \setminus \overline{V} \\ X \setminus \overline{V}' & \text{für } x \in \overline{V} \,. \end{cases}$$

Dann gilt $k \in \underline{A}_e \subset \underline{A}_b$, so daß nach Voraussetzung ein $n_k \in \mathbb{N}$ existiert mit $E_{n_k} \subset \bigcap_{n \geq n_k} St(x_n, k)$. Da in $\overline{V}$ unendlich viele Glieder der Folge $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ liegen, gibt es ein $n \geq n_k$ mit $x_{j_n} \in \overline{V}$. Andererseits liegen unendlich viele Glieder der Folge $(x_{j_{m(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$ in $\overline{V}'$, so daß auch ein $n' \in \mathbb{N}$ existiert mit $m(n') \geq n_k$ und $x_{j_{m(n')}} \in \overline{V}'$. Wegen $x_{j_n} \notin X \setminus \overline{V}$ und $x_{j_{m(n')}} \notin X \setminus \overline{V}'$ folgt mit $x_{j_{m(n')}} \notin St(x_{j_n}, k)$ ein Widerspruch.

2.2.8. Korollar: Für einen regulären Raum $(X, \underline{X})$ sind äquivalent:

1) $(X, \underline{X})$ ist folgenkompakt.

2) $(X, \underline{X})$ ist a-δ-sternfolgenkompakt.

2.2.9. Bemerkung: Bezeichnet I die Menge aller Teilfolgen der Folge $(n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann ist $X := [0,1]^I$ - versehen mit der Produkttopologie - ein kompakter Raum, der nicht folgenkompakt ist (vgl. [Pr] 7.2.10.(2a)). Da ein kompakter e-sternfolgenkompakter Raum stets folgenkompakt ist (2.2.5.(2) und 2.2.6), ist X auch nicht e-sternfolgenkompakt. Mit diesem Beispiel ist gezeigt, daß die Implikationen 2.2.1, 2.2.3 und 2.2.4 im allgemeinen nicht umkehrbar sind. Unter geeigneten Zusatzbedingungen lassen sich gewisse Teilresultate erzielen. So gilt beispielsweise für einen T_2-(e, f_3)-Raum $(X, \underline{X})$:

$$(X, \underline{X}) \text{ BW-kompakt} \Longrightarrow (X, \underline{X}) \text{ a-}\delta\text{-sternfolgenkompakt} \,.$$

2.3. Stetigkeit und Folgenstetigkeit

Es ist bekannt, daß die Stetigkeit einer Abbildung $h: (X, \underline{X}) \longrightarrow (Y, \underline{Y})$ durch die Konvergenz von Folgen beschrieben werden kann, wenn $(X, \underline{X})$ das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Wir zeigen nun, wie sich die Stetigkeit von h charakterisieren läßt, wenn $(X, \underline{X})$ ein (i, f_χ)-Raum ist $(i \in \{e, a, b\})$.

2.3.1. Satz: $(X,\underline{X})$ sei ein (i,f_X)-Raum ($i\in\{e,a,b\}$) und $(Y,\underline{Y})$ ein R_o-Raum. Für eine Abbildung $h: X \longrightarrow Y$ gilt:

1) h ist stetig genau dann, wenn für jede i-Sternfolge (i-δ-Sternfolge) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X die Folge $(h(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ i-Sternfolge (i-δ-Sternfolge) in Y ist.

2) Ist i = b, so gilt:
h ist stetig genau dann, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X die Folge $(h(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e-Sternfolge in Y ist.

Beweis: Zu (1): Sei h stetig. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i-Sternfolge (i-δ-Sternfolge) in X, so müssen wir zeigen, daß für jedes $g\in\underline{A}_i^y$ ein $n_g\in\mathbb{N}$ existiert mit $E^y_{n_g}\subset St(h(x_{n_g}),g)$ ($E^y_{n_g}\subset\bigcap_{n\geq n_g} St(h(x_n),g)$). Sei also $g\in\underline{A}_i^y$. Die Menge Y sei wohlgeordnet. Setzen wir $y_x := \min\{y\in Y \,/\, h(x)\in g(y)\}$ für alle $x\in X$, dann ist $f_g: X \longrightarrow \underline{X}$

$$x \longmapsto h^{-1}\left[g(y_x)\right]$$

eine wohldefinierte Abbildung, die zu $\underline{A}_i^x$ gehört. ($\bigcup_{x\in X} f_g(x) = X$ gilt, weil f_g reflexiv ist; $f_g\in\underline{A}_i^x$ folgt aus $\mathrm{Card}\{f_g(x) \,/\, x\in X\}\leq \mathrm{Card}\{g(y) \,/\, y\in Y\}$.)
Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine i-Sternfolge (i-δ-Sternfolge) ist, existiert zu $f_g\in\underline{A}_i^x$ ein $n_f\in\mathbb{N}$ mit $E^x_{n_f}\subset St(x_{n_f},f_g)$ ($E^x_{n_f}\subset\bigcap_{n\geq n_f} St(x_n,f_g)$). Hieraus folgt sofort $E^y_{n_f}\subset St(h(x_{n_f}),g)$ ($E^y_{n_f}\subset\bigcap_{n\geq n_f} St(h(x_n),g)$). qed.

Die Rückrichtung beweisen wir indirekt. Angenommen, $h: (X,\underline{X}) \longrightarrow (Y,\underline{Y})$ ist im Punkte $x_o\in X$ nicht stetig. Dann existiert eine Umgebung $V\in\underline{\overset{\circ}{U}}(h(x_o))$ mit $h^{-1}[V]\notin\underline{U}(x_o)$. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei die (i,f_X)-Umgebungsfamilie von x_o. O.B.d.A. gelte $B_m\subset B_n$ für $m>n$. Wegen $h^{-1}[V]\notin\underline{U}(x_o)$ gilt für alle $n\in\mathbb{N}$ $C_n := B_n\cap(X\setminus h^{-1}[V])\neq\emptyset$. Wir wählen $x'_n\in C_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = x_o$ für gerade n und $x_n = x'_{\frac{n+1}{2}}$ für ungerade n eine i-δ-Sternfolge in X. (Ist $f\in\underline{A}_i^x = \underline{A}_i^x(x_o)$, so existieren $n_f\in\mathbb{N}$ und $x\in X$ mit $B_{n_f}\subset f(x)$. Es folgt $E^x_{n_f}\subset\bigcap_{n\geq n_f} St(x_n,f)$.)

Beh.: $(h(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht i-Sternfolge.

Bew.: Weil $(Y,\underline{Y})$ ein R_o-Raum ist, gilt $\overline{h(x_o)}\in V$, also $V\cup(Y\setminus\overline{h(x_o)}) = Y$.

Die Abbildung $g: Y\longrightarrow\underline{Y}$ definiert durch

$$y \longmapsto \begin{cases} V & y \in V \\ Y \setminus \overline{h(x_o)} & y \in Y \setminus V \end{cases}$$

gehört zu $\underline{A}_e^y$, also auch zu $\underline{A}_i^y$. Da V kein Folgenglied $h(x_n)$ mit ungeradem Index n und $Y \setminus \overline{h(x_o)}$ kein Folgenglied mit geradem Index enthält, gilt $E_n^y \not\in St(x_n, g)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. qed.

Damit ist eine i-δ-Sternfolge in X gefunden, deren 'Bild' unter h nicht i-Sternfolge ist. Widerspruch!

Zu (2): Sei h stetig. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X, so ist $(x_n)_n$ auch e-Sternfolge (2.1.4). Nach (1) ist $(h(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ e-Sternfolge in Y. qed.

Die Rückrichtung verläuft analog zur Rückrichtung von Teil (1). (Weil $(X,\underline{X})$ (b,f_X)-Raum ist, ist die dort konstruierte Folge bereits konvergent.)

2.3.2. Bemerkungen: (1) Da jeder (i,f_X)-R_o-Raum ($i \in \{e,a,b\}$) das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, besagt obiger Satz, daß die Stetigkeit einer Abbildung auch dann durch Folgeneigenschaften beschrieben werden kann, wenn das 1. Abzählbarkeitsaxiom auf Bildraum und Urbildraum 'aufgeteilt' ist.

(2) Ist $(X,\underline{X})$ ein (i,f_X)-Raum, in dem jede Folge e-Sternfolge ist (etwa $\prod_{r \in R}(S,\underline{S})_r$ aus 1.2.6.(1)), dann ist eine surjektive Abbildung von $(X,\underline{X})$ in einen R_o-Raum $(Y,\underline{Y})$ genau dann stetig, wenn $(Y,\underline{Y})$ indiskret ist; denn ein R_o-Raum ist genau dann indiskret, wenn jede Folge e-Sternfolge ist. Aus der letztgenannten Tatsache folgt

Beh.: Ein topologischer Raum $(X,\underline{X})$, in dem jede Folge e-Sternfolge ist, ist zusammenhängend.

Bew. (indirekt): Angenommen, $(X,\underline{X})$ ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es eine stetige Abbildung $f: (X,\underline{X}) \longrightarrow D_2$ (= zweipunktiger diskreter Raum), die nicht konstant ist. Also existieren $x, y \in X$ mit $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$. Da D_2 ein R_o-Raum ist, gibt es eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D_2, die nicht e-Sternfolge ist. Setzen wir $x_n = x$, falls $s_n = 0$, und $x_n = y$, falls $s_n = 1$, so ist $(x_n)_n$ nach Voraussetzung eine e-Sternfolge in X. Weil f stetig ist, ist $((f(x_n))_n$ e-Sternfolge in Y (2.3.1). Das ist ein Widerspruch, denn es gilt $f(x_n) = s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Kapitel 3: Die Kategorie der (A)-topologischen Räume

Die Begriffe ($\underline{A}$,f)-Raum, $\underline{A}$-sternfolgenkompakt und $\underline{A}$-δ-sternfolgenkompakt, die wir in den vorigen Kapiteln eingeführt haben, sind alle dadurch gekennzeichnet, daß sie von Teilmengen $\underline{A}$ von $\underline{X}^X$ abhängen. Diese Abhängigkeit von einem 'nicht-topologischen' Parameter legt es nahe, die genannten Begriffe in einer allgemeineren Raumklasse als den topologischen Räumen zu betrachten. Wir führen deshalb neue Objekte - die (A)-topologischen Räume - ein. Das sind Tripel $(X,\underline{X},\underline{A})$, wobei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum und $\underline{A}$ eine Teilmenge von $\underline{X}^X$ ist. Da die (A)-topologischen Räume $(X,\underline{X},\underline{A})$ für einelementiges $\underline{A}$ identisch mit den (a)-topologischen Räumen $(X,\underline{X},f)$ aus Abschnitt 1.1 sind, wählen wir als Morphismen zwischen (A)-topologischen Räumen diejenigen Abbildungen, die für einelementiges $\underline{A}$ den (a)-stetigen Abbildungen entsprechen.

3.1. Allgemeines

3.1.1. Definitionen:

1) Für eine Menge X seien $\overline{\emptyset}_X$, $\overline{X}$: $X \longrightarrow 2^X$ definiert durch $\overline{\emptyset}_X(x) := \emptyset$ und $\overline{X}(x) := X$ für alle $x \in X$.

2) Ein Paar $(\underline{X},\underline{A})$ heißt (A)-Topologie auf der Menge X, wenn gilt:
   (a) $\underline{X}$ ist Topologie auf X,
   (b) $\underline{A}$ ist Teilmenge von $\underline{X}^X$ mit $\overline{\emptyset}_X$, $\overline{X} \in \underline{A}$.
   Das Tripel $(X,\underline{X},\underline{A})$ heißt (A)-topologischer Raum.

3) Sind $(X,\underline{X},\underline{A})$, $(Y,\underline{Y},\underline{B})$ (A)-topologische Räume, dann heißt eine Abbildung $h: X \longrightarrow Y$ (A)-stetig, wenn gilt:
   (a) $h: (X,\underline{X}) \longrightarrow (Y,\underline{Y})$ stetig,
   (b) $h^{-1} \circ g \circ h \in \underline{A}$ für alle $g \in \underline{B}$.

3.1.2. Bemerkungen: (1) Die Bedingung $\overline{\emptyset}_X$, $\overline{X} \in \underline{A}$ wurde mit in die Definition aufgenommen, um zu sichern, daß auf einer einelementigen Menge $X = \{x\}$ auch nur eine (A)-Topologie existiert.

(2) Für eine (A)-stetige Abbildung h: $(X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (Y,\underline{Y},\underline{B})$ gilt: (a) $h^{-1} \circ \overline{\emptyset}_Y \circ h = \overline{\emptyset}_X$.

(b) $h^{-1} \circ \overline{\underline{X}} \circ h = \overline{\underline{Y}}$.

(3) Der im nachfolgenden Satz auftretende Begriff der topologischen Kategorie wird in der von Herrlich ([He3]) eingeführten Form verwendet.

3.1.5. Satz: Die (A)-topologischen Räume bilden mit den (A)-stetigen Abbildungen als Morphismen eine topologische Kategorie.

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß eine konkrete Kategorie vorliegt. Ist $(X,\underline{X},\underline{A})$ ein (A)-topologischer Raum, so gilt für alle $f \in \underline{A}$ $1_X^{-1} \circ f \circ 1_X = f$, also ist die identische Abbildung 1_X (A)-stetig. Sind $j: (X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (Y,\underline{Y},\underline{B})$ und $k:(Y,\underline{Y},\underline{B}) \longrightarrow (Z,\underline{Z},\underline{C})$ (A)-stetig, so ist wegen $(k \circ j)^{-1} \circ \underset{\in \underline{C}}{h} \circ (k \circ j) = j^{-1} \circ (\underbrace{k^{-1} \circ h \circ k}_{=: g \in \underline{B}}) \circ j = j^{-1} \circ g \circ j = f \in \underline{A}$ auch $k \circ j$ (A)-stetig. Die Kategorie ist konkret, denn jeder (A)-topologische Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$ ist eine strukturierte Menge $((X,(\underline{X},\underline{A})))$. Um zu zeigen, daß diese Kategorie eine topologische Kategorie ist, müssen wir Existenz und Eindeutigkeit von initialen Strukturen nachweisen. Sei dazu X eine Menge, $((X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i))_{i \in I}$ eine Familie von (A)-topologischen Räumen und $(k_i: X \longrightarrow X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Abbildungen. $\underline{X}$ bezeichne die initiale Topologie bez. der Familie $(k_i)_{i \in I}$. Für $i \in I$ ist dann $k_i^{-1} \circ f_i \circ k_i: X \longrightarrow \underline{X}$ eine wohldefinierte Abbildung für alle $f_i \in \underline{A}_i$. Setzen wir $\underline{A} := \bigcup_{i \in I} \{k_i^{-1} \circ f_i \circ k_i \;/\; f_i \in \underline{A}_i\}$, dann ist $(X,\underline{X},\underline{A})$ ein (A)-topologischer Raum.

Beh.: $(\underline{X},\underline{A})$ ist initial bez. $(X,(k_i)_{i \in I},((X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i))_{i \in I})$.

Bew.: Da alle $k_i: (X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i)$ trivialerweise (A)-stetig sind, brauchen wir nur noch zu zeigen, daß für einen beliebigen (A)-topologischen Raum $(Y,\underline{Y},\underline{B})$ und eine Abbildung $k: Y \longrightarrow X$ gilt:

$$k_i \circ k \text{ (A)-stetig für alle } i \in I \Longrightarrow k \text{ (A)-stetig .}$$

Sei $f \in \underline{A}$. Dann existieren $i \in I$ und $f_i \in \underline{A}_i$ mit $f = k_i^{-1} \circ f_i \circ k_i$. Es folgt $k^{-1} \circ f \circ k = k^{-1} \circ (k_i^{-1} \circ f_i \circ k_i) \circ k = (k_i \circ k)^{-1} \circ f_i \circ (k_i \circ k) \in \underline{B}$. qed.

Beh.: $(\underline{X},\underline{A})$ ist eindeutig bez. der initialen Eigenschaft.

Bew.: Sei $(\underline{X}',\underline{A}')$ eine (A)-Topologie auf X, die bez. $(X,(k_i)_{i\in I},((X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i))_{i\in I})$ initial ist. Dann ist 1_X: $(X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (X,\underline{X}',\underline{A}')$ (A)-stetig, denn $k_i = k_i \circ 1_X$: $(X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i)$ ist (A)-stetig für alle $i\in I$. Also gilt $\underline{X}'\subset\underline{X}$ und $\underline{A}\subset\underline{A}'$. 1_X: $(X,\underline{X}',\underline{A}') \longrightarrow (X,\underline{X},\underline{A})$ ist (A)-stetig, weil $(\underline{X},\underline{A})$ initial und $k_i = k_i \circ 1_X$: $(X,\underline{X}',\underline{A}') \longrightarrow (X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i)$ (A)-stetig ist für alle $i\in I$. Es folgt $\underline{X}\subset\underline{X}'$ und $\underline{A}\subset\underline{A}'$. Insgesamt ist $(\underline{X},\underline{A}) = (\underline{X}',\underline{A}')$ gezeigt. qed.

3.1.4. Bemerkungen: (1) Die Kategorie der (A)-topologischen Räume und (A)-stetigen Abbildungen bezeichnen wir mit (A)-Top.

(2) (A)-Top ist wohlgefasert:

Da die Klasse aller (A)-Topologien auf einer Menge X enthalten ist in der Menge $2^{(2^X)} \times \bigcup\{2^{(\underline{X}^X)} / \underline{X}\in 2^{(2^X)}\}$, ist (A)-Top faser-klein; die Gültigkeit der Punkt-Separator-Eigenschaft ist eine Folge von $\emptyset_X$, $\overline{X}\in\underline{A}$ für jeden (A)-topologischen Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$.

(3) Das Produkt $(X,\underline{X},\underline{A})$ einer Familie $((X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i))_{i\in I}$ von (A)-topologischen Räumen ist gegeben durch:

$X = \prod_{i\in I} X_i$, $\underline{X}$ = Produkttopologie, $\underline{A} = \{p_i^{-1} \circ f_i \circ p_i / i\in I, f_i\in\underline{A}_i\}$.

(4) $\underline{V}$: (A)-Top $\longrightarrow$ Top definiert durch $\underline{V}(X,\underline{X},\underline{A}) := (X,\underline{X})$ für Objekte und $\underline{V}(h) := h$ für Morphismen ist ein topologischer Funktor.

(5) Setzen wir für einen (A)-topologischen Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$ $\underline{X}_{\underline{A}} := \{O\subset X$ / zu jedem $x\in O$ existieren $f_1,\dots f_n\in\underline{A}$ mit $x\in \bigcap_{i=1}^{n} f_i(x)\subset O\}$, dann wird durch $\underline{G}(X,\underline{X},\underline{A}) := (X,\underline{X}_{\underline{A}})$ und $\underline{G}(h) := h$ ein Funktor $\underline{G}$: (A)-Top $\longrightarrow$ Top definiert. Ebenfalls funktoriell ist die Zuordnung $\underline{F}_c$: Top $\longrightarrow$ (A)-Top definiert durch $\underline{F}_c(X,\underline{X}) := (X,\underline{X},\underline{A}_c)$ und $\underline{F}_c(h) := h$. Es gilt $\underline{G} \circ \underline{F}_c = \underline{I}_{\text{Top}} = \underline{V} \circ \underline{F}_c$. Bezeichnet (A)-$\text{Top}_c$ die volle Unterkategorie von (A)-Top, deren Objekte von der Form $(X,\underline{X},\underline{A}_c)$ sind, dann gilt $\underline{F}_c \circ \underline{G} = \underline{I}_{(A)\text{-}\text{Top}_c} = \underline{F}_c \circ \underline{V}$. Also sind die Kategorien Top und (A)-Top_c isomorph.

Für die vollen Unterkategorien (A)-Top^C, (A)-Top^R von (A)-Top, die definiert sind durch $(X,\underline{X},\underline{A})\in|(A)\text{-}\text{Top}^C| :\Longleftrightarrow \underline{A}\supset\underline{A}_c$, bzw. $(X,\underline{X},\underline{A})\in|(A)\text{-}\text{Top}^R| :\Longleftrightarrow \underline{A}\subset\underline{A}_c$, gilt $|(A)\text{-}\text{Top}_c| = |(A)\text{-}\text{Top}^C| \cap |(A)\text{-}\text{Top}^R|$.

(A)-[illegible] bicoreflexiv in (A)-Top (1_X: $(X,\underline{X},\underline{A} \cup \underline{A}_c) \longrightarrow (X,\underline{X},\underline{A})$ ist (A)-[illegible]-Top (Coreflexion) und (A)-Top^b bireflektiv in (A)-Top (1_X: $(X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (X,\underline{X},\underline{A} \cup \underline{A}_b$ ist (A)-Top^b-Reflexion) ist, erhalten wir als Zusammenhang zwischen Top und (A)-Top den

[illegible] Die Kategorie Top ist 'Durchschnitt' von einer bicoreflektiven und einer bireflektiven Unterkategorie von (A)-Top.

(6) Nachfolgend zeigen wir, wie sich Unterobjekte und [illegible] in der Kategorie (A)-Top darstellen lassen. Die Begriffe Initialität und Quotientenobjekt verwenden wir in der für konkrete Kategorien definierten Form, d.h., ein (A)-topologischer Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$ ist Unterobjekt [illegible] eines (A)-topologischen Raumes $(Y,\underline{Y},\underline{B})$, wenn eine Einbettung (= Identitätsabbildung) $h: (X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (Y,\underline{Y},\underline{B})$ existiert. Einbettungen (= Identitätsabbildungen) in (A)-Top sind (A)-stetige Abbildungen $h: (X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (Y,\underline{Y},\underline{B})$ derart, daß $h: X \longrightarrow Y$ injektiv (surjektiv) und $(\underline{X},\underline{A})$ initial bez. $(X,h,(Y,\underline{Y},\underline{B}))$ ($(\underline{Y},\underline{B})$ final bez. $((X,\underline{X},\underline{A}),h,Y)$) ist.

5.1.1. Satz: Ein (A)-topologischer Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$ ist Unterobjekt eines (A)-topologischen Raumes $(Y,\underline{Y},\underline{B})$ genau dann, wenn eine Teilmenge U von Y existiert, so daß $(X,\underline{X},\underline{A})$ und $(U,\underline{Y}_U,\underline{B}_{sU})$ isomorph sind.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß $(X,\underline{X},\underline{A})$ Unterobjekt von $(Y,\underline{Y},\underline{B})$ ist. Dann existiert eine injektive Abbildung $h': X \longrightarrow Y$ mit $\underline{X} = h'^{-1}[\underline{Y}]$ und $\underline{A} = \{h'^{-1} \circ g \circ h' \,/\, g \in \underline{B}\}$. Setzen wir $U := h'[X]$, dann ist $h: X \longrightarrow U$ definiert durch $h(x) := h'(x)$ bijektiv. Da $h: (X,\underline{X}) \longrightarrow (U,\underline{Y}_U)$ auch stetig und offen ist, sind $(X,\underline{X})$ und $(U,\underline{Y}_U)$ homöomorph.

Beh.: $h: (X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (U,\underline{Y}_U,\underline{B}_{sU})$ ist (A)-Top-Isomorphismus.

Bew.: h ist (A)-stetig, denn für $g \in \underline{B}$ gilt $h^{-1} \circ g_{sU} \circ h = h'^{-1} \circ g \circ h' \in \underline{A}$. Definieren wir $k: U \longrightarrow X$ durch $k(h(x)) = x$, dann ist $k: (U,\underline{Y}_U) \longrightarrow (X,\underline{X})$ bijektiv und stetig ($k = h^{-1}$). $k: (U,\underline{Y}_U,\underline{B}_{sU}) \longrightarrow (X,\underline{X},\underline{A})$ ist (A)-stetig, denn für $g \in \underline{B}$ (also $h'^{-1} \circ g \circ h' \in \underline{A}$ beliebig) gilt $k^{-1} \circ (h'^{-1} \circ g \circ h') \circ k =$ [illegible] $\in \underline{B}_{sU}$. Wegen $k \circ h = 1_X$ sind $(X,\underline{X},\underline{A})$ und $(U,\underline{Y}_U,\underline{B}_{sU})$ isomorph. qed.

Zum Beweis der Rückrichtung müssen wir eine injektive Abbildung $h: X \longrightarrow Y$ angeben, so daß $(\underline{X},\underline{A})$ initial bez. $(X,h,(Y,\underline{Y},\underline{B}))$ ist.
Es sei $i: U \longrightarrow Y$ die Inklusionsabbildung und $k: (X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (U,\underline{Y}_U,\underline{B}_{SU})$ der nach Voraussetzung existierende (A)-Top-Isomorphismus. $h: X \longrightarrow Y$ definiert durch $h(x) := i(k(x))$ ist injektiv. Wegen $h^{-1}[\underline{Y}] = (i \circ k)^{-1}[\underline{Y}] = k^{-1}[\underline{Y}_U] \cong \underline{X}$ brauchen wir nur noch $\underline{A} = \{h^{-1} \circ g \circ h \,/\, g \in \underline{B}\} =: \underline{A}'$ nachzuweisen.
"$\subset$" Sei $f \in \underline{A}$. Dann existiert ein $g \in \underline{B}$ mit $k^{-1} \circ g_{SU} \circ k = f$. Wegen $h^{-1} \circ g \circ h = k^{-1} \circ g_{SU} \circ k$ gehört f zu $\underline{A}'$.
"$\supset$" analog.

3.1.6. Bemerkung: Die Konstruktion eines Unterobjektes von $(Y,\underline{Y},\underline{B}) \in |(A)\text{-}\underline{Top}|$ läßt sich - wie wir gesehen haben - in zwei Schritten vollziehen; zuerst wird ein Unterobjekt des zugehörigen topologischen Raumes $(Y,\underline{Y})$ gewählt und anschließend die Menge $\underline{B}$ geeignet modifiziert. Diese Vorgehen ist bei Quotientenobjekten nicht möglich, denn ein Quotientenobjekt in $\underline{Top}$ läßt sich im allgemeinen nicht zu einem Quotientenobjekt in (A)-$\underline{Top}$ ergänzen. Für einen (A)-topologischen Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$ müssen die Äquivalenzrelationen auf X eine zusätzliche Verträglichkeitsbedingung erfüllen, will man mit ihnen Quotientenobjekte von $(X,\underline{X},\underline{A})$ konstruieren. Dazu die folgende

3.1.7. Definition: $(X,\underline{X},\underline{A})$ sei ein (A)-topologischer Raum.
Eine Äquivalenzrelation R auf X heißt verträglich mit $(\underline{X},\underline{A})$, wenn für alle $f \in \underline{A}$ gilt:
(a) $f(x) = \bigcup\{[y] \,/\, y \in f(x)\}$ für alle $x \in X$,
(b) $x \,R\, y \Longrightarrow f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in X$.

3.1.8. Lemma: $(X,\underline{X},\underline{A})$ sei ein (A)-topologischer Raum und R eine mit $(\underline{X},\underline{A})$ verträgliche Äquivalenzrelation auf X. Bezeichnet $\underline{X/R}$ die Quotiententopologie von X/R bez. der natürlichen Abbildung $\omega: X \longrightarrow X/R$, dann gilt:

1) Für alle $f \in \underline{A}$ wird durch $(f/R)([x]) := \bigcup\{[y] / y \in f(x)\}$ eine Abbildung von X/R in $\underline{X/R}$ definiert.

2) Für $\underline{R} := \{R / f \in \underline{A}\}$ ist $\omega: (X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (X/R,\underline{X/R},\underline{A/R})$ eine Quotientenabbildung.

Beweis: Zu 1): Sei $f \in \underline{A}$. $(f/R)([x])$ gehört zu $\underline{X/R}$, denn wegen 3.1.7.(a) gilt $\bigcup\{[y] / y \in f(x)\} = f(x) \in \underline{X}$. f/R ist wohldefiniert, da wegen 3.1.7.(b) aus $x \, R \, y$ zunächst $f(x) = f(y)$ und schließlich $(f/R)([x]) = (f/R)([y])$ folgt. Zu 2): $\omega: (X,\underline{X}) \longrightarrow (X/R,\underline{X/R})$ ist trivialerweise surjektiv und stetig. Da für jedes $f \in \underline{A}$ $\omega^{-1} \circ f/R \circ \omega = f$ gilt, ist ω auch (A)-stetig. Wir müssen nun zeigen, daß $(\underline{X/R},\underline{A/R})$ final bez. $((X,\underline{X},\underline{A}),\omega,X/R)$ ist. Sei dazu $(Y,\underline{Y},\underline{B})$ ein (A)-topologischer Raum und $h: X/R \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so daß $h \circ \omega: (X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (Y,\underline{Y},\underline{B})$ (A)-stetig ist. Zu zeigen: $h: (X/R,\underline{X/R},\underline{A/R}) \longrightarrow (Y,\underline{Y},\underline{B})$ ist (A)-stetig. Ist $O \in \underline{Y}$, dann folgt $\omega^{-1}\left[h^{-1}[O]\right] = (h \circ \omega)^{-1}[O] \in \underline{X}$, also $h^{-1}[O] \in \underline{X/R}$. Ist $g \in \underline{B}$, dann gilt für $f := (h \circ \omega)^{-1} \circ g \circ (h \circ \omega) \in \underline{A}$ gerade $f/R = h^{-1} \circ g \circ h$. qed.

3.1.8. Satz: Ein (A)-topologischer Raum $(Y,\underline{Y},\underline{B})$ ist Quotientenobjekt eines (A)-topologischen Raumes $(X,\underline{X},\underline{A})$ genau dann, wenn eine mit $(\underline{X},\underline{A})$ verträgliche Äquivalenzrelation R auf X existiert, so daß $(X/R,\underline{X/R},\underline{A/R})$ und $(Y,\underline{Y},\underline{B})$ isomorph sind.

Beweis: Es sei $(Y,\underline{Y},\underline{B})$ Quotientenobjekt von $(X,\underline{X},\underline{A})$ und $h: (X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (Y,\underline{Y},\underline{B})$ eine Quotientenabbildung. Wir definieren eine Relation R auf X durch:

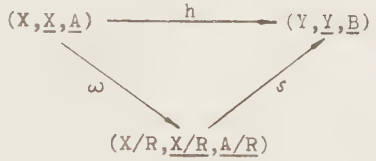
$x \, R \, y :\Longleftrightarrow$ (1) $h(x) = h(y)$

(2) Für alle $f \in \underline{A}$ gilt: (a) $x \in f(z) \Longleftrightarrow y \in f(z)$ für alle $z \in X$,

(b) $f(x) = f(y)$.

Man verifiziert sofort, daß R eine Äquivalenzrelation ist. Da R auch verträglich mit $(\underline{X},\underline{A})$ ist (3.1.7.(a) folgt aus (2a) der Definition von R; 3.1.7.(b) [illegible] (2b)), brauchen wir nur noch zu zeigen, daß $(X/R,\underline{X/R},\underline{A/R})$ und $(Y,\underline{Y},\underline{B})$ isomorph sind. $s: X/R \longrightarrow Y$ $x \longmapsto h(x)$ ist wohldefiniert

(wegen Bedingung (1) der Definiton von R), injektiv und surjektiv (weil h surjektiv ist). Da das Diagramm



kommutiert ($s \circ \omega = h$) und ω eine Quotientenabbildung ist (Lemma 3.1.8), ist s (A)-stetig. Weil h als Quotientenabbildung extremer Epimorphismus ist, ist s als Monomorphismus Isomorphismus. qed.
Die Rückrichtung des Satzes folgt sofort aus 3.1.8.(2).

Die Begriffe $\underline{A}$-sternfolgenkompakt und $\underline{A}$-δ-sternfolgenkompakt, die wir im vorigen Kapitel für topologische Räume definiert haben, übertragen wir nun auf (A)-topologische Räume.

3.1.10. Definitionen: Es sei (X,X,A) ein (A)-topologischer Raum.

1) Eine Folge in X heißt Sternfolge (δ-Sternfolge), wenn sie $\underline{A} \setminus \{\overline{\emptyset}_X\}$-Sternfolge ($\underline{A} \setminus \{\overline{\emptyset}_X\}$-$\delta$-Sternfolge) in (X,X) ist.
2) (X,X,A) heißt sternfolgenkompakt (δ-sternfolgenkompakt), wenn jede Folge in X eine Stern-Teilfolge (δ-Stern-Teilfolge) besitzt.

3.1.11. Satz: (X,X,A), (Y,Y,B) seien (A)-topologische Räume, h: (X,X,A) ⟶ (Y,Y,B) sei ein Epimorphismus in (A)-Top. Ist (X,X,A) sternfolgenkompakt (δ-sternfolgenkompakt), dann ist auch (Y,Y,B) sternfolgenkompakt (δ-sternfolgenkompakt).

Beweis: Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Y. Da h surjektiv ist, existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in h^{-1}[\{y_n\}]$. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X besitzt nach Voraussetzung eine Stern-Teilfolge (δ-Stern-Teilfolge) $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Ist $g \in \underline{B} \setminus \{\overline{\emptyset}_Y\}$, so ge-

fort $f := h^{-1} \circ g \circ h$ zu $\underline{A} \setminus \{\overline{\emptyset}_X\}$, also existiert ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $E^X_{j_{n'}} \subset St(x_{j_{n'}}$, $(E^X_{j_{n'}} \subset \bigcap_{n \geq n'} St(x_{j_n}, f))$.

Beh.: $E^Y_{j_{n'}} \subset St(y_{j_{n'}}, g)$.

Bew.: Ist $n \geq n'$, so gilt $x_{j_n} \in E^X_{j_{n'}} \subset St(x_{j_{n'}}, f)$. Also existiert ein $x \in X$ mit $x_{j_{n'}}, x_{j_n} \in f(x)$. Hieraus folgt $h(x_{j_{n'}}), h(x_{j_n}) \in h(f(x)) \subset g(h(x))$. Setzen wir $y := h(x) \in Y$, dann gilt $y_{j_{n'}}, y_{j_n} \in g(y)$, also $y_{j_n} \in St(y_{j_{n'}}, g)$. qed.

$E^Y_{j_{n'}} \subset \bigcap_{n \geq n'} St(y_{j_n}, g)$ zeigt man analog.

3.1.12. Korollar: Sternfolgenkompaktheit und δ-Sternfolgenkompaktheit bleibe bei Quotientenbildung und bei Vergröberung der Struktur erhalten.

3.1.13. Satz: $(X, \underline{X}, \underline{A})$ sei ein sternfolgenkompakter (δ-sternfolgenkompakter) Raum. Ist $\underline{A}$ abgeschlossen[1], dann ist $(B, \underline{X}_B, \underline{A}_{sB})$ sternfolgenkompakt (δ-sternfolgenkompakt) für jede abgeschlossene Teilmenge B von X.

Beweis: Sei $B \subset X$ abgeschlossen. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in B, dann existier eine Sternteilfolge $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ in $(X, \underline{X}, \underline{A})$.

Beh.: $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist Sternfolge in $(B, \underline{X}_B, \underline{A}_{sB})$.

Bew.: Sei $f \in \underline{A}_{sB}$. Dann gibt es ein $f' \in \underline{A}$ mit $f = f'_{sB}$. Weil $\underline{A}$ und B abgeschlo sen sind, gilt $f'_{cB} \in \underline{A}$. Da $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ Sternfolge in X ist, existiert ein $n' \in$ mit $E_{j_{n'}} \subset St(x_{j_{n'}}, f'_{cB})$. Hieraus folgt $E_{j_{n'}} \subset St(x_{j_{n'}}, f)$:
Ist $n \geq n'$, so gilt $x_{j_n} \in E_{j_n} \subset St(x_{j_{n'}}, f'_{cB})$. Also existiert ein $x \in X$ mit $x_{j_{n'}}$, $x_{j_n} \in f'_{cB}(x)$. Wegen $x_{j_{n'}}, x_{j_n} \in B$ gilt $x \in B$, also $f'_{cB}(x) = f'(x)$. Wir erhalten $x_{j_{n'}}, x_{j_n} \in f'(x) \cap B = f(x)$. qed.
Der Beweis für die δ-Sternfolgenkompaktheit verläuft analog.

3.1.14. Satz: Das Produkt abzählbar vieler sternfolgenkompakter (δ-sternfol-

---

[1] s. [...]

genkompakter) Räume ist sternfolgenkompakt (δ-sternfolgenkompakt).

Beweis: $((X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i))_{i\in I}$ $(I\subset\mathbb{N})$ sei eine Familie sternfolgenkompakter Räume, $(X,\underline{X},\underline{A})$ bezeichne ihr Produkt. $(x^{(0,n)} = (x_i^{(0,n)})_{i\in I})_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge in $X = \prod_{i\in I} X_i$. Die Folge $(x_1^{(0,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine Stern-Teilfolge $(x_1^{(1,n)})_{n\in\mathbb{N}}$; zur Folge $(x_2^{(1,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in X_2 gibt es eine Stern-Teilfolge $(x_2^{(2,n)})_{n\in\mathbb{N}}$; usw. Da jede Teilfolge einer Sternfolge wieder eine Sternfolge ist, finden wir zu jedem $j\in I$ eine Teilfolge $(x^{(j,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x^{(0,n)})_{n\in\mathbb{N}}$, so daß für alle $i\in I$ mit $1\leq i\leq j$ $(x^{(j,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x^{(i,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_i^{(j,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Sternfolge in X_i ist. Ist I endlich, also $j:=\max(I)<\infty$, dann ist $(x^{(j,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Sternfolge in X:

Sei $f\in\underline{A}\setminus\{\overline{\emptyset}_X\}$. Dann existieren $i\in I$ und $f_i\in\underline{A}_i\setminus\{\overline{\emptyset}_{X_i}\}$ mit $f = p_i^{-1}\circ f_i\circ p_i$. Weil $(x_i^{(j,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Sternfolge in X_i ist, gibt es ein $n_i\in\mathbb{N}$ mit $E^i_{(j,n_i)}\subset St(x_i^{(j,n_i)},f_i)$. Nun gilt $E_{(j,n_i)}\subset St(x^{(j,n_i)},f)$. (Ist $n\geq n_i$, dann gilt $x_i^{(j,n)}\in St(x_i^{(j,n_i)},f_i)$, also existiert ein $x_i\in X_i$ mit $x_i^{(j,n)}, x_i^{(j,n_i)}\in f_i(x_i)$. Wählen wir $x\in p_i^{-1}[\{x_i\}]$, dann gilt $p_i(x^{(j,n)}), p_i(x^{(j,n_i)})\in f(x_i) = f(p_i(x))$, woraus schließlich $x^{(j,n)}, x^{(j,n_i)}\in f(x)$ folgt.)

Ist $I=\mathbb{N}$, dann betrachte man die 'Diagonalfolge' $(x^{(n,n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Da alle Projektionen $(x_i^{(n,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ Sternfolgen sind, ist - mit den gleichen Schlüssen wie oben - auch $(x^{(n,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Sternfolge.

Den Fall der δ-Sternfolgenkompaktheit zeigt man analog.

3.2. $*$-kompakte (A)-topologische Räume

Die Begriffe $\underline{A}$-sternfolgenkompakt und $\underline{A}$-δ-sternfolgenkompakt sind zwar Oberbegriffe des Begriffs folgenkompakt, implizieren aber nicht abzählbare Kompaktheit. Um mit diesen Begriffen dennoch Zwischenklassen zwischen den folgenkompakten und den abzählbar kompakten Räumen konstruieren zu können, benötigen wir eine geeignete Zusatzbedingung - die $*$-Kompaktheit.

3.2.1. Definition: Ein (A)-topologischer Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$ heißt $*$-kompakt, wenn zu jedem $k\in\underline{A}$ und jedem $x\in X$ eine endliche Teilmenge $G = G(k,x)$ von X

existiert mit $\overline{k(x)} \subset \bigcup_{x' \in G} k(x')$.

3.2.2. Bemerkungen: (1) Jeder (A)-topologische Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$ mit $\underline{A} \subset \underline{A}_e$ ist $*$-kompakt; insbesondere ist der indiskrete Raum $(X,\{X,\emptyset\},\{\overline{X},\overline{\emptyset}_X\})$ $*$-kompakt.

(2) Nennen wir einen topologischen Raum $(X,\underline{X})$ $\underline{A}$-$*$-kompak für $\underline{A} \subset \underline{X}^X$, wenn der (A)-topologische Raum $(X,\underline{X},\underline{A} \cup \{\overline{X},\overline{\emptyset}_X\})$ $*$-kompakt ist, dan gilt: (a) $(X,\underline{X})$ $\underline{A}_c$-$*$-kompakt $\Longleftrightarrow$ Jede offene Menge in X ist abgeschlossen .

(b) $(X,\underline{X})$ abzählbar kompakt $\Longrightarrow$ $(X,\underline{X})$ $\underline{A}_a$-$*$-kompakt .

(c) $(X,\underline{X})$ quasikompakt $\Longrightarrow$ $(X,\underline{X})$ $\underline{A}_b$-$*$-kompakt .

3.2.3. Satz: $(X,\underline{X},\underline{A})$ sei ein $*$-kompakter Raum. Ist $\underline{A}$ abgeschlossen, dann ist $(B,\underline{X}_b,\underline{A}_{sB})$ $*$-kompakt für jede abgeschlossene Teilmenge B von X.

Beweis: Sei $B \subset X$ abgeschlossen und $x \in B$. Ist $f \in \underline{A}$, also $f_{sB} \in \underline{A}_{sB}$ beliebig, dann gilt, weil $\underline{A}$ abgeschlossen ist, $f_{cB} \in \underline{A}$. Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge G von X mit $\overline{f_{cB}(x)} \subset \bigcup_{x' \in G} f_{cB}(x')$. Nach Definition von f_{cB} (1.2.12.(2)) gilt $\overline{f(x)} \subset \bigcup_{x' \in G} f_{cB}(x')$. Wir definieren $G' := G \cap B \subset B$.
1. Fall: $G' = \emptyset$. Dann gilt $\bigcup_{x' \in G} f_{cB}(x') = X \setminus B$, also $\overline{f(x)} \cap B = \emptyset$. Es folgt $\overline{f_{sB}(x)}^X B = \overline{f(x) \cap B}^X B = \overline{f(x) \cap B}^X \subset \overline{f(x)} \cap \overline{B} = \overline{f(x)} \cap B = \emptyset \subset f_{sB}(x)$. qed.
2. Fall: $G' \neq \emptyset$. Aus $\overline{f(x)} \subset \bigcup_{x' \in G} f_{cB}(x')$ folgt $\overline{f(x)} \cap B \subset (\bigcup_{x' \in G} f_{cB}(x')) \cap B = \bigcup_{x' \in G} (f_{cB}(x') \cap B) = \bigcup_{x' \in G'} (f_{cB}(x') \cap B) = \bigcup_{x' \in G'} (f(x') \cap B) = \bigcup_{x' \in G'} f_{sB}(x')$. Da stets $\overline{f_{sB}(x)}^X B \subset \overline{f(x)} \cap B$ gilt (vgl. Fall 1), ist alles gezeigt.

Bemerkung: Obwohl $\underline{A}_c$ im allgemeinen nicht abgeschlossen ist (1.2.14.(2)), gilt obiger Satz (wegen 3.2.2.(a)) auch für den Fall $\underline{A} = \underline{A}_c$; hierbei sogar für jede Teilmenge von X.

3.2.4. Satz: $(X,\underline{X},\underline{A})$, $(Y,\underline{Y},\underline{B})$ seien (A)-topologische Räume und $h: (X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (Y,\underline{Y},\underline{B})$ ein (A)-Top-Epimorphismus mit $h[\overline{f(x)}] = \overline{h[f(x)]}$ für alle $f \in \underline{A}$ und alle $x \in X$. Ist $(X,\underline{X},\underline{A})$ $*$-kompakt, so ist $(Y,\underline{Y},\underline{B})$ $*$-kompakt.

Beweis: Sei $g \in \underline{E}$ und $y \in Y$. Weil h surjektiv ist, existiert $x \in X$ mit $h(x) = y$. Zu $f := h^{-1} \circ g \circ h \in \underline{A}$ finden wir nach Voraussetzung eine endliche Teilmenge G_X von X mit $\overline{f(x)} \subset \bigcup_{x' \in G_X} f(x')$. Für $G_Y := h[G_X] \subset Y$ gilt dann $\overline{g(y)} \subset \bigcup_{y' \in G_Y} g(y')$. ($\overline{g(y)} = \overline{g(h(x))} = \overline{h[f(x)]} = h[\overline{f(x)}] \subset h\left[\bigcup_{x' \in G_X} f(x')\right] = \bigcup_{x' \in G_X} h[f(x')] = \bigcup_{x' \in G_X} g(h(x')) = \bigcup_{y' \in G_Y} g(y')$.)

3.2.5. Korollar: (X,$\underline{X}$,$\underline{A}$) sei ein $*$-kompakter Raum. Ist $\underline{A}$ abgeschlossen, so ist jeder Quotientenraum von (X,$\underline{X}$,$\underline{A}$) $*$-kompakt.

Beweis: Sei R eine mit ($\underline{X}$,$\underline{A}$) verträgliche Äquivalenzrelation auf X. Nach Satz 3.2.4 reicht es, $\omega[\overline{f(x)}] = \overline{\omega[f(x)]}$ für alle $f \in \underline{A}$ und alle $x \in X$ zu zeigen. Das ist gleichbedeutend mit (*) $\left\{[y] \,/\, y \in \overline{f(x)}\right\} = \overline{\left\{[y] \,/\, y \in f(x)\right\}}$. Zunächst beweisen wir folgendes

Lemma: Für $f \in \underline{A}$ und $x, y \in X$ gilt: $y \in X \setminus \overline{f(x)} \iff [y] \subset X \setminus \overline{f(x)}$.

Beweis: "$\Longleftarrow$": trivial.

"$\Longrightarrow$": Sei $y \in X \setminus \overline{f(x)}$ und $u \in [y]$. Weil R mit ($\underline{X}$,$\underline{A}$) verträglich ist, folgt $f(u) = f(y)$. Angenommen, es gilt $u \in \overline{f(x)}$. Für $B' := \overline{f(x)}$ ist dann $f_{cB'}(u) = f(u)$. Weil y nicht zu B' gehört, gilt $f_{cB'}(y) = X \setminus B' = X \setminus \overline{f(x)}$. u R y impliziert $f(u) = X \setminus \overline{f(x)}$. Wir definieren $B'' := \overline{f(u)}$. Dann gilt $f_{cB''}(y) = f(y) = f(u)$ und $u \in \overline{f(u)}$ (wäre $u \in X \setminus \overline{f(u)}$, dann würde $f_{cB''}(u) = X \setminus \overline{f(u)}$ folgen, und wir bekämen mit $f(u) = X \setminus \overline{f(u)}$ einen Widerspruch). Setzen wir $B := B' \cap B''$, so gilt $f_{cB}(u) = f(u)$ und $f_{cB}(y) = X \setminus B = (X \setminus \overline{f(x)}) \cup (X \setminus (X \setminus \overline{f(x)}))$. Aus u R y und $X \setminus (X \setminus \overline{f(x)}) = \overline{f(x)}^{\circ}$ folgt $X \setminus \overline{f(x)} = f(u) = f_{cB}(u) = f_{cB}(y) = (X \setminus \overline{f(x)}) \cup \overline{f(x)}^{\circ}$. Diese Gleichheit ist äquivalent mit $\overline{f(x)}^{\circ} \subset X \setminus \overline{f(x)}$. Hieraus folgt $\overline{f(x)}^{\circ} \cap \overline{f(x)} = \emptyset$, was wegen $f(x) = f(x)^{\circ}$ gleichbedeutend mit $f(x) = \emptyset$ ist. Das ist ein Widerspruch zu $u \in \overline{f(x)}$.

Zum Beweis der Gleichung (*) genügt es, "$\supset$" zu zeigen, denn die Inklusion "$\subset$" folgt bereits aus der Stetigkeit von ω: (X,$\underline{X}$) $\longrightarrow$ (X/R,$\underline{X}$/R). Sei also $[z] \in \overline{\left\{[y] \,/\, y \in f(x)\right\}}$. Angenommen, es gilt $z \in X \setminus \overline{f(x)}$. Setzen wir $\underline{S} := \left\{[u] \,/\, u \in X \setminus \overline{f(x)}\right\}$, dann ist $\underline{S}$ eine offene Umgebung von [z] ($\bigcup \underline{S} = X \setminus \overline{f(x)}$ nach Lemma), und es gilt $\underline{S} \cap \left\{[y] \,/\, y \in f(x)\right\} = \emptyset$ (ebenfalls nach obigem Lemma). Das ist ein Widerspruch zu $[z] \in \overline{\left\{[y] \,/\, y \in f(x)\right\}}$, also gilt $z \in \overline{f(x)}$. qed.

3.2.6. Satz: Das Produkt einer Familie $((X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i))_{i\in I}$ nicht leerer (A)-topologischer Räume ist genau dann $*$-kompakt, wenn alle $(X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i)$ $*$-kompakt sind.

Beweis: Ist das Produkt $(X,\underline{X},\underline{A}) = (\prod_{i\in I}X_i, \prod_{i\in I}\underline{X}_i, \{p_i^{-1}\circ f_i \circ p_i \;/\; i\in I,\ f_i\in\underline{A}_i\})$ $*$-kompakt, so reicht es, um die $*$-Kompaktheit von $(X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i)$ für $i\in I$ nachzuweisen. Die Gleichheit $p_i[\overline{f(x)}] = \overline{p_i[f(x)]}$ für alle $f\in\underline{A}$ und alle $x\in X$ zu zeigen (s. 3.2.4). Sei also $x\in X$ und $f = p_j^{-1}\circ f_j \circ p_j\in\underline{A}$ beliebig ($j\in I$, $f_j\in\underline{A}_j$). Es gilt $f(x) = (p_j^{-1}\circ f_j\circ p_j)(x) = \prod_{l\in I}B_l$ mit $B_l = X_l$ für $l\neq j$ und $B_j = f_j(p_j(x))\subset X_j$. Also ist

$$p_i[f(x)] = \begin{cases} X_j & \text{für } i\neq j \\ f_j(p_j(x)) & \text{für } i = j \end{cases},$$

und wir erhalten wegen $\overline{\prod_{l\in I}B_l} = \prod_{l\in I}\overline{B_l}$ $p_i[\overline{f(x)}] = \overline{B}_i = \overline{p_i[f(x)]}$. qed.

Zum Beweis der Rückrichtung sei $x = (x_j)_{j\in I}\in X$ und $f\in\underline{A}$. Dann existieren $i\in I$ und $f_i\in\underline{A}_i$ mit $f = p_i^{-1}\circ f_i\circ p_i$. Weil $(X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i)$ $*$-kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge G_i von X_i mit $\overline{f_i(x_i)}\subset\bigcup_{x_i'\in G_i}f_i(x_i')$. Wir setzen $G := \prod B_j$ mit $B_j = \{x_j\}$ für $j\neq i$ und $B_i = G_i$. Dann ist G eine endliche Teilmenge von X, und es gilt $\overline{f(x)}\subset\bigcup_{x'\in G}f(x')$:

$\overline{f(x)} = \overline{(p_i^{-1}\circ f_i\circ p_i)(x)} = \overline{p_i^{-1}\big[f_i(x_i)\big]}\subset p_i^{-1}\big[\overline{f_i(x_i)}\big]\subset p_i^{-1}\Big[\bigcup_{x_i'\in G_i}f_i(x_i')\Big] = \bigcup_{x_i'\in G_i}p_i^{-1}\big[f_i(x_i')\big] \overset{(*)}{\subset}\bigcup_{x'\in G}f(x')$. ((*): Ist $y\in p_i^{-1}\big[f_i(x_i')\big]$ für $x_i'\in G_i$, so gehört $x' := (z_j)_{j\in I}$ mit $z_j = x_j$ für $j\neq i$ und $z_i = x_i'$ zu G, und es gilt $f(x') = (p_i^{-1}\circ f_i\circ p_i)(x') = p_i^{-1}\big[f_i(x_i')\big]$, also gilt $y\in f(x')$.)

3.2.7. Bemerkung: In der Kategorie Top gilt dieser Produktsatz nicht.

Ist $\underline{A}\in\{\mathfrak{e},\mathfrak{A},\mathfrak{c}\}$, so folgt aus der $\underline{A}_i$-$*$-Kompaktheit (vgl. 3.2.2.(2)) eines Produktes topologischer Räume zwar die $\underline{A}_i$-$*$-Kompaktheit der einzelnen Faktoren, jedoch gilt nicht die Umkehrung. Ist $(X,\underline{A})$ das Produkt einer Familie $\underline{A}_i$-$*$-kompakter topologischer Räume, so gilt für das Produkt $(X,\underline{X},\underline{A})$ der zugehörigen $*$-bezogenen ($\underline{A}$-topologischen Räume im allgemeinen nur $\underline{A}\subset\underline{A}_i^X$.

Für Unterräume von $*$-kompakten gegenüber Bildung abgeschlossener Unterräume und Quotientenräume (3.2.3 und 3.2.5) gilt auch in der Kategorie Top.

3.3. Abzählbar kompakte (A)-topologische Räume

3.3.1. Vorbemerkung: Es ist bekannt, daß das Produkt von zwei abzählbar kompakten topologischen Räumen nicht abzählbar kompakt zu sein braucht. Dieses schlechte Produktverhalten der abzählbaren Kompaktheit resultiert aus einer Eigenschaft der Produkttopologie, nämlich aus der Tatsache, daß eine offene Teilmenge O eines Produktes $X_1 \times X_2$ im allgemeinen nicht der Bedingung

(*) $p_1[O] = X_1 \vee p_2[O] = X_2$ genügt. Betrachten wir aber Produkte in der Kategorie (A)-Top, so stellen wir fest, daß dort stets genügend viele offene Mengen existieren, die die Eigenschaft (*) besitzen. (Bezeichnet $(X,\underline{X},\underline{A})$ das Produkt der (A)-topologischen Räume $(X_1,\underline{X}_1,\underline{A}_1)$ und $(X_2,\underline{X}_2,\underline{A}_2)$, so hat jedes $f \in \underline{A}$ die Darstellung $p_i^{-1} \circ f_i \circ p_i$ ($i \in \{1,2\}$, $f_i \in \underline{A}_i$), also erfüllt jede in X offene Menge der Form $f(x)$ ($f \in \underline{A}$, $x \in X$) die Bedingung (*).) Diesen Sachverhalt berücksichtigen wir bei Übertragung des Begriffs abzählbar kompakt auf die Kategorie (A)-Top. Wir nennen einen (A)-topologischen Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$ abzählbar kompakt, wenn jede Folge in dem - nicht notwendigerweise topologischen - Raum $(X,\{f(x) \mid f \in \underline{A}, x \in X\})$ einen Häufungspunkt besitzt. Diese Definition der abzählbaren Kompaktheit ist verträglich mit der Definition der abzählbaren Kompaktheit in Top, d.h. $(X,\underline{X},\underline{A}_c)$ ist genau dann abzählbar kompakt, wenn $(X,\underline{X})$ abzählbar kompakt ist.

Der wesentliche Unterschied zwischen abzählbarer Kompaktheit in Top und in (A)-Top ist der, daß abzählbare Kompaktheit in (A)-Top eine Produktinvariante ist.

3.3.2. Definitionen: Es sei $(X,\underline{X},\underline{A})$ ein (A)-topologischer Raum.

a) Ein Punkt $x \in X$ heißt (A)-Häufungspunkt einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X, wenn für alle $(f,x') \in \underline{A} \times X$ gilt:

$$x \in f(x') \Longrightarrow f(x') \text{ enthält unendlich viele Folgenglieder .}$$

b) $(X,\underline{X},\underline{A})$ heißt abzählbar kompakt, wenn jede Folge in X einen (A)-Häufungspunkt besitzt.

3.3.3. Bemerkung: Jeder Häufungspunkt in $(X,\underline{X})$ ist (A)-Häufungspunkt in $(X,\underline{X},\underline{A})$ für alle $\underline{A} \subset \underline{X}^X$. Also ist ein (A)-topologischer Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$ abzählbar kompakt, wenn der topologische Raum $(X,\underline{X})$ abzählbar kompakt ist. Die Rückrichtung gilt im allgemeinen nicht. Beispielsweise ist $(X,2^X,\{\overline{\emptyset}_X,\overline{X}\})$ abzählbar kompakt für jede Menge X, jedoch ist $(X,2^X)$ nicht abzählbar kompakt für Mengen X mit $|X| \geq \aleph_0$.

3.3.4. Satz: Für einen (A)-topologischen Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$ mit $\underline{A} \supset \underline{A}_a$ sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X},\underline{A})$ ist abzählbar kompakt.
2) Zu jedem $f \in \underline{A}_a$ existiert eine endliche Teilmenge G_f von X mit $\bigcup \{f(x) \,/\, x \in G_f\} = X$.

Beweis: Analog zum Beweis in Top (vgl. [Pr] Satz 7.2.3).

3.3.5. Korollar: Für einen (A)-topologischen Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$ gilt:

$(X,\underline{X},\underline{A})$ abzählbar kompakt $\Longrightarrow$ $(X,\underline{X},\underline{A} \cap \underline{A}_a)$ $*$-kompakt .

3.3.6. Satz: Es sei $(X,\underline{X},\underline{A})$ ein (A)-topologischer Raum derart, daß für alle $O \in \underline{X}$ und $x \in O$ $(f,x') \in \underline{A} \times X$ existiert mit $x \in f(x') \subset O$. Dann sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X},\underline{A})$ ist abzählbar kompakt.
2) $(X,\underline{X})$ ist abzählbar kompakt.

Beweis: klar.

3.3.7. Korollar: Sei $(X,\underline{X},\underline{A})$ ein (A)-topologischer Raum.

1) Ist $\underline{A} = \underline{A}_c$, dann gilt:
   $(X,\underline{X})$ abzählbar kompakt $\Longleftrightarrow$ $(X,\underline{X},\underline{A})$ abzählbar kompakt.
2) Ist $(X,\underline{X})$ R_0-Raum und $\underline{A} \supset \underline{A}_e$, dann gilt:
   $(X,\underline{X})$ abzählbar kompakt $\Longleftrightarrow$ $(X,\underline{X},\underline{A})$ abzählbar kompakt.

3.3.8. Bemerkungen: (1) Da die Kategorien Top und (A)-Top_c isomorph sind (s. 3.1.4.(5)), ist (nach 3.3.7.(1)) der Begriff abzählbar kompakt in (A)-Top verträglich mit dem Begriff abzählbar kompakt in Top.

(2) Nachfolgend zeigen wir, wie sich abzählbare Kompaktheit in (A)-Top auf Unterräume überträgt. Erblichkeit auf alle abgeschlossenen Unterräume - wie in Top - kann nicht gelten, da abzählbare Kompaktheit eines (A)-topologischen Raumes $(X,\underline{X},\underline{A})$ nicht von allen offenen Mengen $O \in \underline{X}$ abhängt, sondern nur von offenen Mengen der Form $f(x)$ $(f \in \underline{A},\ x \in X)$.

3.3.9. Satz: $(X,\underline{X},\underline{A})$ sei ein abzählbar kompakter (A)-topologischer Raum, B eine Teilmenge von X. Ist B Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen der Form $X \setminus f(x)$ $(f \in \underline{A},\ x \in X)$, dann ist $(B,\underline{X}_B,\underline{A}_{sB})$ abzählbar kompakt.

Beweis: Sei $\underline{A}' \times X' \subset \underline{A} \times X$ und $B := \bigcap \{X \setminus f(x) \,/\, (f,x) \in \underline{A}' \times X'\}$. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in B, dann existiert nach Voraussetzung ein (A)-Häufungspunkt $x_o \in X$. Es gilt $x_o \in B$. (Sonst gäbe es $(f,x) \in \underline{A}' \times X'$ mit $x_o \notin X \setminus f(x)$, also $x_o \in f(x)$, und es müßten unendlich viele Folgenglieder in $f(x)$ liegen. Das ist aber ein Widerspruch zu $B \subset X \setminus f(x)$!) Sei jetzt $f \in \underline{A}$, also $f_{sB} \in \underline{A}_{sB}$ beliebig. Ist $b \in P$ mit $x_o \in f_{sB}(b) = f(b) \cap B$, dann liegen unendlich viele Folgenglieder in $f(b)$, also auch in $f(b) \cap B$. qed.

3.3.10. Satz: $(X,\underline{X},\underline{A})$, $(Y,\underline{Y},\underline{B})$ seien (A)-topologische Räume, $h: (X,\underline{X},\underline{A}) \longrightarrow (Y,\underline{Y},\underline{B})$ ein (A)-Top-Epimorphismus. Ist $(X,\underline{X},\underline{A})$ abzählbar kompakt, so ist auch $(Y,\underline{Y},\underline{B})$ abzählbar kompakt.

Beweis: Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Y. Da h surjektiv ist, existieren $x_n \in h^{-1}[\{y_n\}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X besitzt einen (A)-Häufungspunkt $x_o \in X$. Dann ist $y_o := h(x_o)$ (A)-Häufungspunkt der Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Sei $(g,y) \in \underline{B} \times Y$ mit $y_o \in g(y)$. Dann gehört $f := h^{-1} \circ g \circ h$ zu $\underline{A}$, und es existiert ein $x \in X$ mit $h(x) = y$. $y_o \in g(y)$ impliziert $x_o \in f(x)$, so daß nach Voraussetzung unendlich viele x_n in $f(x)$ liegen. Wegen $g(y) = h[f(x)]$ liegen unendlich viele y_n $(= h(x_n))$ in $g(y)$. qed.

3.3.11. Satz: Das Produkt einer Familie $((X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i))_{i\in I}$ nicht leerer (A)-topologischer Räume ist genau dann abzählbar kompakt, wenn alle $(X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i)$ abzählbar kompakt sind.

Beweis: " $\Longrightarrow$ ": Ist $\prod_{i\in I}X_i$ abzählbar kompakt, so sind nach 3.3.10 auch alle X_i abzählbar kompakt, denn die Projektionsabbildungen $p_i: \prod_{i\in I}X_i \longrightarrow X_i$ sind (A)-Top-Epimorphismen.

" $\Longleftarrow$ ": Es sei $(x_n = (x_n^i)_{i\in I})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $(X,\underline{X},\underline{A}) := (\prod_{i\in I}X_i, \prod_{i\in I}\underline{X}_i, \{p_i^{-1} \circ f_i \circ p_i \;/\; i\in I,\ f_i\in\underline{A}_i\})$. Weil $(X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i)$ abzählbar kompakt ist für jedes $i\in I$, besitzt jede der Folgen $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ einen (A)-Häufungspunkt $x_o^i\in X_i$.

Beh.: $(x_o^i)_{i\in I}$ ist (A)-Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bew.: Sei $f\in\underline{A}$. Dann existieren $i\in I$ und $f_i\in\underline{A}_i$ mit $f = p_i^{-1}\circ f_i\circ p_i$. Ist $x\in X$ mit $(x_o^i)_{i\in I}\in f(x)$, so gilt $x_o^i\in p_i(f(x)) = f_i(p_i(x))$. Weil $(X_i,\underline{X}_i,\underline{A}_i)$ abzählbar kompakt ist, existiert eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit $x_{k_n}^i\in f_i(p_i(x$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Wegen $f(x) = \prod_{j\in I}B_j$ mit $B_i = f_i(p_i(x))$ und $B_j = X_j$ für $j\neq i$, gilt $x_{k_n}\in f(x)$ für alle $n\in\mathbb{N}$. qed.

3.3.12. Bemerkung: Durch Identifikation eines (A)-topologischen Raumes $(X,\underline{X},\underline{A})$ mit dem Tupel $(X,\{f(x) \;/\; f\in\underline{A},\ x\in X\})$ können wir nicht nur abzählbare Kompaktheit produktinvariant auf die Kategorie (A)-Top übertragen, sondern auch andere topologische Begriffe. Nehmen wir beispielsweise die T_4-Eigenschaft: Nennen wir einen (A)-topologischen Raum $(X,\underline{X},\underline{A})$ T_4-Raum, wenn $(X,\{f(x) \;/\; f\in x\in X\})$ T_4- Raum im topologischen Sinne ist, d.h., wenn für alle (f_1,x_1), $(f_2, x_2)\in\underline{A}\times X$ mit $f_1(x_1)\cup f_2(x_2) = X$ Paare (f_1',x_1'), $(f_2',x_2')\in\underline{A}\times X$ existieren mit $f_i(x_i)\cup f_i'(x_i') = X$ $(i = 1,2)$ und $f_1'(x_1')\cap f_2'(x_2') = \emptyset$, dann ist die T_4-Eigenschaft in (A)-Top verträglich mit der T_4-Eigenschaft in Top, und sie ist auf diesem eine Produktinvariante. Daß diese Methode Produktinvarianten liefert, liegt daran, daß bei dieser Art der Verallgemeinerung nur die Menge $\underline{A}$, also nur die dritte Komponente des Tripels $(X,\underline{X},\underline{A})$, eine Rolle spielt, diese Komponente aber - im Gegensatz zur Topologie - keiner einschränkenden Bedingung unterliegt.

Kapitel 4: Abzählbare Kompaktheit und verwandte Begriffe

Im ersten Abschnitt wird ein Spezialfall des Begriffs *-kompakt, den wir im vorigen Kapitel für (A)-topologische Räume definiert haben, auf topologische Räume übertragen. Es ergibt sich ein Begriff, der zwischen den Begriffen abzählbar kompakt und abzählbar parakompakt liegt; wir nennen ihn schwach abzählbar kompakt. Für zusammenhängende T_1-Räume erweisen sich die Begriffe abzählbar kompakt und schwach abzählbar kompakt als äquivalent.
Der zweite Abschnitt behandelt schwach folgenkompakte Räume; das sind Räume, die zugleich schwach abzählbar kompakt und a-δ-sternfolgenkompakt sind. Diese Räume bilden eine Zwischenklasse zwischen den folgenkompakten und den abzählbar kompakten Räumen. Jeder abzählbar kompakte (e,f_1)-R_0-Raum ist schwach folgenkompakt; jeder schwach folgenkompakte R_{1a}-Raum ist folgenkompakt.
In Abschnitt 3 wird eine weitere Zwischenklasse zwischen den folgenkompakten und den abzählbar kompakten Räumen eingeführt - die Klasse der filterkompakten Räume. Das Wesentliche an dieser Raumklasse ist, daß sie zu einer Klasse erweitert werden kann, die abgeschlossen gegenüber endlichen Produkten ist.

4.1. Schwach abzählbar kompakte Räume

4.1.1. Bemerkung und Definition: In 3.2.2.(2) haben wir den topologischen Begriff $\underline{A}$-*-kompakt eingeführt. Dieser Begriff, der von dem (A)-topologischen Begriff *-kompakt abgeleitet wurde, soll nun für den Fall $\underline{A} = \underline{A}_a$ genauer untersucht werden. Da wir unsere Betrachtungen auf die Kategorie Top beschränken, ersetzen wir die Bezeichnung $\underline{A}_a$-*-kompakt durch eine 'rein topologische' Bezeichnung. Motiviert durch die Tatsache, daß $\underline{A}_a$-*-kompakt ein schwächerer Begriff ist als abzählbar kompakt, nennen wir die $\underline{A}_a$-*-kompakten Räumen von nun an schwach abzählbar kompakt.

4.1.2. Satz: Für einen topologischen Raum $(X,\underline{X})$ sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist schwach abzählbar kompakt.

2) Für jede abzählbare offene Überdeckung $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X, die bez. Mengeninklusion wohlgeordnet ist, gilt:
Für alle $n\in\mathbb{N}$ existiert ein $m_n\in\mathbb{N}$ mit $\overline{O}_n\subset O_{m_n}$.

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine offene Überdeckung von X mit $O_n\subset O_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. O.B.d.A. gelte $O_n\neq O_m$ für alle $n, m\in\mathbb{N}$ mit $n\neq m$. Wir wählen $x_1\in O_1$ und $x_n\in O_n\setminus O_{n-1}$ für alle $n\geq 2$. Dann ist

$$f: X \longrightarrow \underline{X} \text{ definiert durch}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} O_n & \text{für } x = x_n \\ \emptyset & \text{für } x\in X\setminus\{x_n \,/\, n\in\mathbb{N}\} \end{cases}.$$

eine Abbildung, die zu $\underline{A}_a$ gehört. Ist nun $n\in\mathbb{N}$, so existiert zu $x_n\in X$ eine endliche Teilmenge G von X mit $\overline{f(x_n)}\subset\bigcup_{x\in G} f(x)$. Für $m_n := \max\{m\in\mathbb{N} \,/\, x_m\in G\}$ gilt dann $\bigcup_{x\in G} f(x) = O_{m_n}$, also $\overline{O}_n\subset O_{m_n}$. qed.
2) $\Longrightarrow$ 1): Sei $f\in\underline{A}_a$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit $\{f(x) \,/\, x\in X\} = \{f(x_n) \,/\, n\in\mathbb{N}\}$. Setzen wir $O_n := \bigcup_{i=1}^{n} f(x_i)$ für alle $n\in\mathbb{N}$, dann ist $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von x, die bez. $\subseteq$ wohlgeordnet ist. Ist $x\in X$, dann existiert ein $n\in\mathbb{N}$ mit $f(x) = f(x_n)$. Zu $n\in\mathbb{N}$ existiert nach Voraussetzung ein $m_n\in\mathbb{N}$ mit $\overline{O}_n\subset O_{m_n}$. Definieren wir $G := \{x_i \,/\, i = 1,\ldots m_n\}$, so gilt $\overline{f(x)} = \overline{f(x_n)}\subset\overline{O}_n\subset O_{m_n} = \bigcup_{i=1}^{m_n} f(x_i)$. qed.

Bemerkung: Die Aussage 4.1.2.(2) ist gleichbedeutend damit, daß jede bez. Mengeninklusion wohlgeordnete abzählbare offene Überdeckung von X Quasischrumpfung von sich selber ist.

4.1.3. Satz: Es sei $(X,\underline{X})$ ein T_1-Raum, der höchstens endlich viele offen-abgeschlossene Teilmengen besitzt. Dann sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist abzählbar kompakt.
2) $(X,\underline{X})$ ist schwach abzählbar kompakt.

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): klar.
2) $\Longrightarrow$ 1) (indirekt): Ist X nicht abzählbar kompakt, so gibt es eine Folge

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ohne Häufungspunkt. O.B.d.A. gelte $x_n \neq x_m$ für n, $m\in\mathbb{N}$ mit $n \neq m$. Bezeichnen wir mit E_m die Endstücken der Folge, dann gilt $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{E}_m = \emptyset$. Setzen wir $O_m := X\setminus\overline{E}_m$ für alle $m\in\mathbb{N}$, dann ist $(O_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdekkung von X, die bez. $\subseteq$ wohlgeordnet ist. Weil X schwach abzählbar kompakt ist, gibt es zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein $m_n\in\mathbb{N}$ mit $\overline{O}_n \subset O_{m_n}$. Da X ein T_1-Raum ist und die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt besitzt, gilt $E'_m = \emptyset$ für alle $m\in\mathbb{N}$; also sind alle E_m abgeschlossen. Es folgt $\overline{O}_n = \overline{X\setminus\overline{E}_n} = \overline{X\setminus E}_n = X\setminus E_n^o$ und - wegen $\overline{O}_n \subset O_{m_n}$ - $E_{m_n} = X\setminus O_{m_n} \subset X\setminus\overline{O}_n = E_n^o$.

Beh.: E_{m_n} ist offen für alle $n\in\mathbb{N}$.

Bew.: Sei $n\in\mathbb{N}$. Wegen $E_{m_n} \subset E_n^o \subset E_n$ gilt $m_n \geq n$. $A := \{x_k \,/\, n \leq k < m_n\}$ ist als endliche Teilmenge eines T_1-Raumes abgeschlossen, also ist $E_n^o \cap (X\setminus A)$ offen. Da $E_{m_n} = E_n^o \cap (X\setminus A)$ gilt, ist auch E_{m_n} offen.

Weil die Menge $\{E_{m_n} \,/\, n\in\mathbb{N}\}$ unendlich ist (wäre $\{E_{m_n} \,/\, n\in\mathbb{N}\} = \{E_{m_{n_i}} \,/\, i = 1,\ldots k\}$, dann würde für $m_o := \max\{m_{n_i} \,/\, i = 1,\ldots k\}$ $E_{m_o} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_{m_n}$ gelten, und wegen $E_{m_o} \subset E_n^o$ für alle $n\in\mathbb{N}$ bekämen wir mit $E_{m_o} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ einen Widerspruch zu $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{E}_n = \emptyset$) und alle E_{m_n} offen und abgeschlossen sind, erhalten wir einen Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist X abzählbar kompakt.

4.1.4. Beispiele: (1) Jede unendliche Menge versehen mit der diskreten Topologie ist schwach abzählbar kompakt und T_1-Raum (ja sogar metrisierbar), aber nicht abzählbar kompakt.

(2) $(\mathbb{R},\underline{\mathbb{R}})$ und $(\mathbb{R},\underline{\mathbb{R}}_A)$ sind zusammenhängende T_1-Räume, die nicht abzählbar kompakt sind - also auch nicht schwach abzählbar kompakt.

4.1.5. Definition (Katetov): Ein topologischer Raum $(X,\underline{X})$ heißt fast abzählbar kompakt, wenn zu jeder abzählbaren offenen Überdeckung $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von X eine endliche Teilmenge $\{n_1,\ldots n_k\}$ von $\mathbb{N}$ existiert mit

$$\bigcup \{\overline{O_{n_i}} \,/\, i = 1,\ldots k\} = X \,.$$

4.1.6. Satz: Für einen topologischen Raum $(X,\underline{X})$ sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist abzählbar kompakt.

2) $(X,\underline{X})$ ist schwach abzählbar kompakt und fast abzählbar kompakt.

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): klar.

2) $\Longrightarrow$ 1): Sei $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X. O.B.d.A. gelte $O_n \neq O_m$ für n, $m\in\mathbb{N}$ mit $n \neq m$. Wir setzen $U_n := \bigcup_{i=1}^{n} O_i$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Dann ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare offene Überdeckung von X, die bez. $\subseteq$ wohlgeordnet ist. Weil X fast abzählbar kompakt ist, finden wir $n_1,\ldots n_k \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{U}_{n_i} = X$. Für $n_o := \max\{n_i \mid i = 1,\ldots k\}$ gilt dann $\overline{U}_{n_o} = \overline{\bigcup_{i=1,\ldots k} U_{n_i}} = \bigcup_{i=1,\ldots k} \overline{U}_{n_i} = X$. Weil X schwach abzählbar kompakt ist, existiert zu $n_o\in\mathbb{N}$ ein $m\in\mathbb{N}$ mit $\overline{U}_{n_o} \subset U_m$. Es folgt $X = U_m = \bigcup_{i=1}^{m} O_i$. qed.

4.1.7. Satz: Es sei $(X,\underline{X})$ ein schwach abzählbar kompakter topologischer Raum. Dann besitzt jede abzählbare offene Überdeckung von X eine abzählbare lokalendliche offene Verfeinerung.

Korollar: Jeder schwach abzählbar kompakte Raum ist abzählbar parakompakt.

Beweis: Es sei $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X. O.B.d.A. gelte $O_1 \subsetneq O_2 \subsetneq O_3 \subsetneq \ldots$

1. Fall: Es existiert ein $n\in\mathbb{N}$, so daß für alle $m > n$ $O_m \subset \overline{O}_n$ gilt. Es folgt $\bigcup_{m>n} O_m \subset \overline{O}_n$ und schließlich $X = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} O_m = \bigcup_{m\leq n} O_m \cup \bigcup_{m>n} O_m \subset O_n \cup \overline{O}_n = \overline{O}_n$. Weil X schwach abzählbar kompakt ist, existiert ein $m_n\in\mathbb{N}$ mit $\overline{O}_n \subset O_{m_n}$. Dann gilt $X = O_{m_n}$, d.h. $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt sogar eine endliche Teilüberdeckung.

2. Fall: Für alle $n\in\mathbb{N}$ existiert ein $m > n$ mit $O_m \not\subset \overline{O}_n$.

Dann ist m_1: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$n \longmapsto \min\{j\in\mathbb{N} \mid O_j \not\subset \overline{O}_n\}$$

eine wohldefinierte Abbildung mit $m_1(n) > n$ für alle $n\in\mathbb{N}$. (Wäre $m_1(n) \leq n$ für ein $n\in\mathbb{N}$, dann würde $O_{m_1(n)} \subset O_n \subset \overline{O}_n$ folgen. Das ist aber ein Widerspruch zur Wahl von $m_1(n)$.) Weil X schwach abzählbar kompakt ist, gibt es zu jedem $n\in\mathbb{N}$ ein $m^n\in\mathbb{N}$ mit $\overline{O_{m_1(n)}} \subset O_{m^n}$. Dann ist

m_2: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$n \longmapsto \min\{j\in\mathbb{N} \mid \overline{O_{m_1(n)}} \subset O_j\}$$

eine wohldefinierte Abbildung mit $m_2(n) > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Wäre $m_2(n) \leq n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann würde $\overline{O_{m_1(n)}} \subset O_{m_2(n)} \subset O_n$ folgen, und wir bekämen mit $O_{m_1(n)} \subset \overline{O_{m_1(n)}} \subset \overline{O_{m_2(n)}} \subset \overline{O}_n$ einen Widerspruch zur Wahl von $m_1(n)$.)

Beh.: m_1 und m_2 sind monoton steigend.

Bew.: Zu m_1: $O_{m_1(n+1)} \not\subset \overline{O_{n+1}}$ impliziert $O_{m_1(n+1)} \not\subset \overline{O}_n$. Hieraus folgt $m_1(n+1) \in \{j \in \mathbb{N} \,/\, O_j \not\subset \overline{O}_n\}$, also $m_1(n) \leq m_1(n+1)$.

Zu m_2: Nach Definition von m_2 gilt $\overline{O_{m_1(n+1)}} \subset O_{m_2(n+1)}$. Weil m_1 monoton steigend ist, folgt $\overline{O_{m_1(n)}} \subset \overline{O_{m_1(n+1)}} \subset O_{m_2(n+1)}$. $\overline{O_{m_1(n)}} \subset O_{m_2(n+1)}$ impliziert $m_2(n+1) \in \{j \in \mathbb{N} \,/\, \overline{O_{m_1(n)}} \subset O_j\}$, also gilt $m_2(n) \leq m_2(n+1)$.

Wegen $O_{m_1(n)} \subset \overline{O_{m_1(n)}} \subset O_{m_2(n)}$ gilt auch $m_1(n) \leq m_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir können nun die lokalendliche offene Verfeinerung von $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren. Setzen wir $U_1 := O_{m_2(1)}$ und $U_n := O_{m_2(n)} \cap (X \setminus \overline{O_{n-1}})$ für $n \geq 2$, dann gilt:

(1) $U_n \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(2) $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine offene Überdeckung von X,

(3) $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Verfeinerung von $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

(4) $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist lokalendlich.

Zu (1): $n = 1$: trivial.

$n \geq 2$: $O_{m_1(n-1)} \not\subset \overline{O_{n-1}} \wedge O_{m_1(n-1)} \subset O_{m_2(n-1)}$ impliziert $O_{m_2(n-1)} \not\subset \overline{O_{n-1}}$, also gilt $U_n = O_{m_2(n-1)} \cap (X \setminus \overline{O_{n-1}}) \neq \emptyset$.

Zu (2): Sei $x \in X$. Dann existiert ein $i_x \in \mathbb{N}$ mit $x \in O_{i_x}$. Definieren wir $m_x := \min\{i \in \mathbb{N} \,/\, x \in \overline{O}_i\}$, dann gilt $x \in U_{m_x}$:

1. Fall: $m_x = 1$. Es folgt $m_1(m_x) = m_1(1)$. $1 < m_1(1)$ impliziert $O_1 \subset O_{m_1(1)}$, also $\overline{O}_1 \subset \overline{O_{m_1(1)}}$. Mit $x \in \overline{O_{m_x}} = \overline{O}_1 \subset \overline{O_{m_1(1)}} \subset O_{m_2(1)} = U_1 = U_{m_x}$ ist alles gezeigt.

2. Fall: $m_x > 1$. Es folgt $m_x - 1 \geq 1$. $m_1(n) > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ impliziert $m_1(m_x - 1) \geq m_x$, woraus $O_{m_x} \subset O_{m_1(m_x-1)}$ folgt. Nach Definition von m_2 gilt $\overline{O_{m_x}} \subset \overline{O_{m_1(m_x-1)}} \subset O_{m_2(m_x-1)}$, also $x \in O_{m_2(m_x-1)}$. Da wir m_x als Minimum aller $i \in \mathbb{N}$ mit $x \in \overline{O}_i$ gewählt haben, gilt $x \notin \overline{O_{m_x-1}}$, so daß insgesamt $x \in O_{m_2(m_x-1)} \cap (X \setminus \overline{O_{m_x-1}}) = U_{m_x}$ gezeigt ist.

Zu (3): trivial.

Zu (4): Wir zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $m > m_2(n)$ $U_n \cap U_m = \emptyset$ gilt.

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $m > m_2(n)$, so gilt $m-1 \geq m_2(n) \geq m_2(n-1)$. Ist $x \in U_n = O_{m_2(n-1)} \cap (X \setminus \overline{O_{n-1}})$, dann ist $x \in O_{m_2(n-1)}$. $m_2(n-1) \leq m-1$ impliziert $O_{m_2(n-1)} \subset O_{m-1}$, also gehört x zu O_{m-1}. Wegen $U_m = O_{m_2(m-1)} \cap (X \setminus \overline{O_{m-1}}) \subset X \setminus \overline{O_{m-1}}$ gilt $x \in X \setminus U_m$.

4.1.8. Bemerkungen: (1) Die Rückrichtung dieses Satzes gilt im allgemeinen nicht: $(\mathbb{R}, \underline{\mathbb{R}})$ ist sogar metrisierbar und nicht schwach abzählbar kompakt.

(2) Jeder abgeschlossene Unterraum eines schwach abzählbar kompakten Raumes ist schwach abzählbar kompakt (vgl. 3.2.3). Das stetige Bild eines schwach abzählbar kompakten Raumes braucht nicht schwach abzählbar kompakt zu sein. Beispiel: $1_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, \underline{D}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \underline{\mathbb{R}})$ ist bijektiv und stetig, $(\mathbb{R}, \underline{D})$ ist schwach abzählbar kompakt (jeder diskrete Raum ist schwach abzählbar kompakt), $(\mathbb{R}, \underline{\mathbb{R}})$ ist nicht schwach abzählbar kompakt.

4.2. Schwach folgenkompakte Räume

4.2.1. Definition: Ein topologischer Raum $(X, \underline{X})$ heißt schwach folgenkompakt, wenn er schwach abzählbar kompakt und a-δ-sternfolgenkompakt ist.

4.2.2. Satz: Es sei $(X, \underline{X})$ ein topologischer Raum. Dann impliziert jede der folgenden Bedingungen die nächst folgende:

1) $(X, \underline{X})$ ist folgenkompakt,

2) $(X, \underline{X})$ ist schwach folgenkompakt,

3) $(X, \underline{X})$ ist abzählbar kompakt.

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): Jeder folgenkompakte Raum ist a-δ-sternfolgenkompakt (s. Korollar [illegible]) und - als abzählbar kompakter Raum - auch schwach abzählbar kompakt.

2) $\Longrightarrow$ 3): Folgt aus 4.1.7 und 2.2.3.

4.2.3. Satz: Es sei $(X, \underline{X})$ ein [illegible]-Raum, $f: X \longrightarrow \underline{X}$ eine Abbildung mit $f_1 \leq f$ und $\underline{A} \subset \underline{X}^X$ mit $\underline{A}_f \subset \underline{A} \subset \underline{A}_\omega$. Ist $(X, \underline{X})$ $(\underline{A}, f)$-Raum, so sind äquivalent:

1) $(X, \underline{X})$ ist abzählbar kompakt,

2) $(X,\underline{X})$ ist schwach folgenkompakt.

Beweis: 2) $\Longrightarrow$ 1): klar nach 4.2.2.

1) $\Longrightarrow$ 2): Da jeder abzählbar kompakte Raum schwach abzählbar kompakt ist, brauchen wir nur zu zeigen, daß $(X,\underline{X})$ a-δ-sternfolgenkompakt ist.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. O.B.d.A. gelte $x_n \neq x_m$ für $n, m\in\mathbb{N}$ mit $n \neq m$. Nach Voraussetzung besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $x_o\in X$.

1. Fall: Unendlich viele Folgenglieder liegen in $\overline{\{x_o\}}$.

Dann existiert eine Teilfolge $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{j_n}\in\overline{\{x_o\}}$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Beh.: $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist a-δ-Sternfolge.

Bew.: Sei $k\in\underline{A}_a$. Dann gibt es ein $x\in X$ mit $x_o\in k(x)$. Weil $(X,\underline{X})$ R_o-Raum ist, gilt $\overline{\{x_o\}}\subset k(x)$, also $x_{j_n}\in k(x)$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Es folgt trivialerweise $E_{j_1}\subset\bigcap_{n\geq 1}St(x_{j_n},k)$. qed.

2. Fall: In $\overline{\{x_o\}}$ liegen höchstens endlich viele Folgenglieder.

Wir nehmen o.B.d.A. an, daß $x_n\in X\setminus\overline{\{x_o\}}$ gilt für alle $n\in\mathbb{N}$. Der Häufungspunkt x_o besitzt nach Voraussetzung eine $(\underline{A},f)$-Umgebungsfamilie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $U_m\subset U_n$ für alle $n, m\in\mathbb{N}$ mit $m>n$. Da jede Umgebung U_n unendlich viele Folgenglieder enthält, existieren

$$j_1 := \min\{j\in\mathbb{N} / x_j\in U_1\}$$
$$\vdots$$
$$j_n := \min\{j\in\mathbb{N}\setminus\{j_1,j_2,\dots j_n\} / x_j\in U_n\}$$
$$\vdots$$

Für die Teilfolge $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $x_{j_n}\in U_m$ für alle $n, m\in\mathbb{N}$ mit $m\leq j_n$.

Beh.: $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist a-δ-Sternfolge.

Bew.: Sei $k\in\underline{A}_a$. Dann existieren $m\in\mathbb{N}$ und $y\in X$ mit $U_m\cap f(x_o)\subset k(y)$. Wegen $f_1(x_o)=X\setminus\overline{\{x_o\}}\subset f(x_o)$ folgt $U_m\setminus\overline{\{x_o\}}\subset k(y)$. Setzen wir $n_k := \min\{n\in\mathbb{N} / j_n\geq m\}$, so gilt $j_n\geq j_{n_k}\geq m$ für alle $n\geq n_k$, also $x_{j_n}\in U_m$ für alle $n\geq n_k$. Da kein x_n zu $\overline{\{x_o\}}$ gehört, folgt $x_{j_n}\in U_m\setminus\overline{\{x_o\}}\subset k(y)$ für alle $n\geq n_k$. Wir erhalten $E_{j_{n_k}}\subset\bigcap_{n\geq n_k}St(x_{j_n},k)$. qed.

In 2.2.7 haben wir gezeigt, daß jeder b-δ-sternfolgenkompakte T_{2a}-Raum folgenkompakt ist. Für den Beweis war b-δ-Sternfolgenkompaktheit jedoch nicht explizit erforderlich, es genügten bereits die schwächeren Bedingungen e-δ-sternfolgenkompakt und b-sternfolgenkompakt. b-Sternfolgenkompaktheit (zusammen mit der T_1-Eigenschaft) wurde dabei aber nur benötigt, um abzählbare Kompaktheit zu sichern, so daß insbesondere jeder abzählbar kompakte e-δ-sternfolgenkompakte R_{1a}-Raum folgenkompakt ist.

Da ein schwach folgenkompakter Raum sowohl abzählbar kompakt als auch e-δ-sternfolgenkompakt ist, gilt

4.2.4. Satz: Für einen R_{1a}-Raum $(X,\underline{X})$ sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist folgenkompakt,
2) $(X,\underline{X})$ ist schwach folgenkompakt.

4.2.5. Bemerkung: In Kapitel 1.2 haben wir den Begriff $(\underline{A},f)$-Raum als Verallgemeinerung des 1. Abzählbarkeitsaxioms eingeführt; in 1.3 zeigten wir, wann für $(\underline{A},f)$-Räume abzählbare Kompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent sind. Speziell für $\underline{A} = \underline{A}_e$ und $f = f_1$ erhielten wir (vgl. 1.3.10)

$$\text{abzählbar kompakt} \xrightarrow{(e,f_1)\text{-}R_{1a}} \text{folgenkompakt}\ .$$

4.2.3 und 4.2.4 besagen nun, daß in der Klasse der R_0-Räume ($\cong$ Klasse der topologischen Nearness-Räume ([He3])) die Implikationen

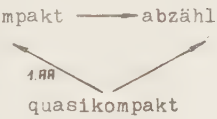
$$\text{abzählbar kompakt} \xrightarrow{(e,f_1)} \text{schwach folgenkompakt} \xrightarrow{R_{1a}} \text{folgenkompakt}$$

gelten, also daß die Bedingung (e,f_1)-R_{1a} über eine Zwischenklasse zwischen den folgenkompakten und den abzählbar kompakten Räumen 'aufgespalten' werden kann.

Im nachfolgenden Abschnitt zeigen wir, daß zu der von Tanaka [Ta] eingeführten Eigenschaft C_o, die eine der stärksten Verallgemeinerungen des 1. Abzählbarkeitsaxiom darstellt, eine Zwischenklasse zwischen den folgenkompakten und den abzählbar kompakten Räumen gefunden werden kann, die alle abzählbar kompakten C_o-Räume enthält.

4.3. Filterkompakte Räume

4.3.1. Vorbemerkung: Bei Betrachtung des 'Implikationsdreiecks'



stellt man einige Besonderheiten fest:

(1) Abzählbare Kompaktheit und Folgenkompaktheit lassen sich durch Folgeneigenschaften charakterisieren, Quasikompaktheit nicht.

(2) Abzählbare Kompaktheit und Quasikompaktheit lassen sich durch Überdeckungseigenschaften charakterisieren, Folgenkompaktheit nicht.

(3) Quasikompaktheit bleibt bei Bildung von (beliebigen) Produkten erhalten; Folgenkompaktheit bleibt bei Bildung von abzählbaren Produkten erhalten; Abzählbare Kompaktheit bleibt nicht einmal bei Bildung von endlichen Produkten erhalten.

Angesichts der unter (3) genannten Tatsachen stellt sich die Frage, ob es eine Zwischenklasse zwischen den folgenkompakten und den abzählbar kompakten Räumen gibt, die abgeschlossen gegenüber Bildung von endlichen Produkten ist und die Klasse der quasikompakten Räume umfaßt. Wir zeigen, daß solch eine Raumklasse tatsächlich existiert. Der topologische Begriff, den wir dabei verwenden, ist eine Kombination von einer Überdeckungsaussage mit einer Folgenaussage. Wir definieren diesen Begriff jedoch nicht als Überdeckungs- bzw. Folgeneigenschaft, sondern führen ihn als Filtereigenschaft ein.

4.3.2. Definitionen: $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum.

(a) Ein Filter $\underline{F}$ auf X heißt häufungspunktstabil, wenn jeder feinere Filter $\underline{G} \prec \underline{F}$ einen Häufungspunkt besitzt.

(b) $(X,\underline{X})$ heißt:

(1) bb-filterkompakt, wenn jeder (beliebige) Filter auf X einen feineren häufungspunktstabilen (beliebigen) Filter besitzt.

(2) bE-filterkompakt, wenn jeder (beliebige) Filter auf X einen feineren häufungspunktstabilen Elementarfilter besitzt.

(3) Eb-filterkompakt, wenn jeder Elementarfilter auf X einen feineren häufungspunktstabilen (beliebigen) Filter besitzt.

(4) EE-filterkompakt, wenn jeder Elementarfilter auf X einen feineren häufungspunktstabilen Elementarfilter besitzt.

4.3.3. Satz: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum. Dann gilt:

1) X quasikompakt $\Longleftrightarrow$ X bb-filterkompakt.

2) X abzählbar kompakt $\Longleftrightarrow$ X Eb-filterkompakt.

3) X endlich $\Longleftrightarrow$ X bE-filterkompakt.

4) X folgenkompakt $\overset{(a)}{\Longrightarrow}$ X EE-filterkompakt $\overset{(b)}{\Longrightarrow}$ X abzählbar kompakt

$$\Uparrow (c)$$

X quasikompakt .

5) X bE-filterk. $\Longrightarrow$ X bb-filterk. $\Longrightarrow$ X EE-filterk. $\Longrightarrow$ X Eb-filterk.

Beweis: Zu (1): X quasikompakt $\Longleftrightarrow$ Jeder Filter auf X besitzt einen Häufungspunkt

$\Longleftrightarrow$ Jeder Filter auf X ist häufungspunktstabil

$\Longleftrightarrow$ X ist bb-filterkompakt .

Zu (2): X abzählbar kompakt $\Longleftrightarrow$ Jeder Elementarfilter auf X besitzt einen Häufungspunkt

$\Longleftrightarrow$ X ist Eb-filterkompakt .

Zu (3): "$\Longrightarrow$": Ist X endlich und $\underline{F}$ ein Filter auf X, dann gilt o.B.d.A. $\underline{F} = \{U \in \underline{P}(X) \,/\, U \supset A\}$ mit $A = \{a_1, \ldots a_n\} \subset X$. $\underline{F}$ läßt sich als Elementarfilter darstellen: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{N}$ und $r \in \{1, \ldots n\}$ mit $m = q \cdot n + r$. Definieren wir $x_m := a_r$, so ist der zur Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gehörende Elementarfilter identisch mit $\underline{F}$. Als endlicher Raum ist $(X,\underline{X})$ quasikompakt, also ist jeder Filter auf X häufungspunktstabil (beachte (1)).

"$\Longleftarrow$": Ist X bE-filterkompakt, so besitzt insbesondere jeder Ultrafilter auf X einen feineren häufungspunktstabilen Elementarfilter. Also ist jeder

Ultrafilter auf X ein konvergenter Elementarfilter. Bezeichnet $M\underline{U}$ die Menge aller Ultrafilter auf X, so finden wir zu jedem $\underline{U} \in M\underline{U}$ eine Folge $(x_n^{\underline{U}})_{n \in \mathbb{N}}$ in X und ein $x^{\underline{U}} \in X$ mit $(x_n^{\underline{U}})_{n \in \mathbb{N}} \to x^{\underline{U}}$ und $\underline{E} := (\{E_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \underline{U}$.

Beh.: Jeder Filter $\underline{U} \in M\underline{U}$ ist Obermengenfilter einer einelementigen Menge.

Bew.: Wir zeigen zunächst, daß $A := \{x_n^{\underline{U}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ endlich ist für alle $\underline{U} \in M\underline{U}$. Angenommen, A ist nicht endlich. O.B.d.A. seien alle Folgenglieder paarweise verschieden. $(x_{2n}^{\underline{U}})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(x_n^{\underline{U}})_{n \in \mathbb{N}}$, deren Elementarfilter $\underline{E}'$ feiner ist als $\underline{E}$. Weil $\underline{U}$ ein Ultrafilter ist, gilt $\underline{E} = \underline{E}'$. Das ist ein Widerspruch, denn in $E_n' \in \underline{E}'$ ist kein $E_m \in \underline{E}$ enthalten.
Wir setzen $A = \{x^1, \ldots x^m\}$ und $A' := \{x^i \in A \mid i \in \{1, \ldots m\}, x^i = x_n^{\underline{U}} \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\underline{U}$ Obermengenfilter von A'. Weil $\underline{U}$ ein Ultrafilter ist, ist A' einelementig. qed.
Es folgt Card X = Card $M\underline{U}$ und hieraus schließlich Card $X < \aleph_0$.

Zu (4)(a): Trivial, denn jeder konvergente Filter ist häufungspunktstabil.

(b): klar unter Verwendung von (2).

(c): In einem quasikompakten Raum ist jeder Filter häufungspunktstabil.

(5): klar nach (1) - (4).

4.3.4. Bemerkungen: (1) Da ein quasikompakter Raum nicht folgenkompakt und ein folgenkompakter Raum nicht quasikompakt zu sein braucht, sind die Implikationen 4.3.3.(a) und 4.3.3.(c) nicht umkehrbar. Daß auch für 4.3.3.(b) im allgemeinen keine Rückrichtung gilt, wird in 4.3.19.(1) gezeigt.

(2) Die EE-filterkompakten Räume bezeichnen wir von nun an kurz als filterkompakte Räume; für die drei anderen Filterkompaktheitseigenschaften verwenden wir die äquivalenten Bezeichnungen gemäß 4.3.3.(1)-(3).

4.3.5. Lemma: $(X, \underline{X})$ sei ein topologischer Raum.

1) Für einen Filter $\underline{F}$ auf X sind äquivalent:
   (a) $\underline{F}$ ist häufungspunktstabil,
   (b) Jeder Filter $\underline{G} \geq \underline{F}$ ist häufungspunktstabil.
2) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $\underline{E}$ der zugehörige Elementarfilter,

dann gibt es zu jedem Filter $\underline{F} \leq \underline{E}$ auf X, der eine abzählbare Basis besitzt, eine Teilfolge $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so daß der zugehörige Elementarfilter $\underline{E}'$ feiner ist als $\underline{F}$.

Beweis: Zu (1): klar, weil $\leq$ transitiv und reflexiv ist.

Zu (2): Es sei $\underline{E}$ der Elementarfilter der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Weiter sei $\underline{F} = (\{F_n \,/\, n \in \mathbb{N}\})$ ein Filter auf X mit $\underline{F} \leq \underline{E}$. Setzen wir $G_n := \bigcap_{i=1}^{n} F_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so ist $\underline{G} := (\{G_n \,/\, n \in \mathbb{N}\})$ ein Filter auf X, der feiner ist als $\underline{F}$. Folglich gilt auch $\underline{G} \leq \underline{E}$. Also gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m_n \in \mathbb{N}$ mit $G_{m_n} \subset E_n$. Zu $n_o :=$ existiert dann ein $m_1 \in \mathbb{N}$ mit $G_{m_1} \subset E_1$. Setzen wir $m(n_o) := \max\{n_o, m_1\}$, dann gilt auch $G_{m(n_o)} \subset E_1$. Wir wählen $y_1 \in G_{m(n_o)}$ beliebig. Wegen $G_{m(n_o)} \subset E_1$ finde wir ein $j_1 \geq n_o$ mit $y_1 = x_{j_1}$. Zu $n_1 := j_1 + 1 \in \mathbb{N}$ gibt es analog ein $m(n_1) \geq n_1$ mit $G_{m(n_1)} \subset E_{n_1}$. Wir wählen $y_2 \in G_{m(n_1)}$. Dann existiert ein $j_2 \geq n_1 > j_1$ mit $y_2 = x_{j_2}$ .... Induktiv erhalten wir eine Folge $(j_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ mit $j_{k+1} > j_k$ und $x_{j_{k+1}} \in G_{m(j_k+1)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $(x_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beh.: Der zur Folge $(x_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gehörende Elementarfilter $\underline{E}'$ ist feiner als $\underline{F}$

Bew.: Es gilt sogar $\underline{E}' \leq \underline{G}$:

Sei $G \in \underline{G}$. Dann existiert ein $n > 1$ mit $G_n \subset G$. Es gilt $\{x_{j_{k+1}} \,/\, k \geq n-1\} \subset G_n$ ($k \geq n-1$ impliziert $n \leq k+1 \leq j_k + 1 \leq m(j_k+1)$, also $x_{j_{k+1}} \in G_{m(j_k+1)} \subset G_n$) und wegen $\{x_{j_k} \,/\, k \geq n\} = \{x_{j_{k+1}} \,/\, k \geq n-1\}$ schließlich $E'_{j_n} \subset G_n \subset G \in \underline{E}'$. qed.

4.3.6. Satz: Für einen topologischen Raum $(X, \underline{X})$ sind äquivalent:

1) $(X, \underline{X})$ ist filterkompakt,
2) Jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X besitzt eine Teilfolge $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ derart, daß zu jeder offenen Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von X eine endliche Teilmenge I' von I existiert mit

$$x_{j_n} \in \bigcup_{i \in I'} O_i \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N} .$$

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X und $\underline{E}$ der zugehörige Elementarfilter. Nach Voraussetzung gibt es einen feineren häufungspunktstabil

Elementarfilter $\underline{E}'$ auf X. Weil $\underline{E}'$ eine abzählbare Basis besitzt, existiert nach 4.3.5.(2) eine Teilfolge $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$, deren Elementarfilter $\underline{E}''$ feiner ist als $\underline{E}'$. Da $\underline{E}'$ häufungspunktstabil ist, ist auch $\underline{E}''$ häufungspunktstabil (4.3.5 (1)). Sei jetzt $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Dann gilt $\bigcap_{i \in I} (X \setminus O_i) = \emptyset$. Angenommen, für alle $n \in \mathbb{N}$ und jede endliche Teilmenge I' von I gilt $E''_n := \{x_k \,/\, k \geq n\} \not\subset \bigcup_{i \in I'} O_i$. Dann folgt $E''_n \cap \bigcap_{i \in I'} (X \setminus O_i) \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $I' \subset I$ endlich. $\underline{B} := \{E''_n \cap \bigcap_{i \in I'} (X \setminus O_i) \,/\, n \in \mathbb{N}, I' \subset I \text{ endlich}\}$ ist offensichtlich Filterbasis auf X; denn es gilt $\underline{B} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \underline{B}$ und

$$(E''_n \cap \bigcap_{i \in I'} (X \setminus O_i)) \cap (E''_m \cap \bigcap_{i \in I''} (X \setminus O_i)) = E''_{\max(n,m)} \cap \bigcap_{i \in I' \cup I''} (X \setminus O_i) \in \underline{B}$$

für alle n, $m \in \mathbb{N}$ und alle $I', I'' \subset I$ endlich. Bezeichnet $\underline{F}$ den von $\underline{B}$ erzeugten Filter, so gilt $\underline{F} \leq \underline{E}''$. Weil $\underline{E}''$ häufungspunktstabil ist, besitzt $\underline{F}$ einen Häufungspunkt. Wegen $\emptyset \neq \bigcap_{F \in \underline{F}} \overline{F} = \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ I' \subset I \text{ endl.}}} (\overline{E''_n \cap \bigcap_{i \in I'} (X \setminus O_i)}) \subset \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ I' \subset I \text{ endl.}}} (\overline{E''_n} \cap \overline{\bigcap_{i \in I'} (X \setminus O_i)})$

$$\subset \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ I' \subset I \text{ endl.}}} (\overline{E''_n} \cap \bigcap_{i \in I'} \overline{(X \setminus O_i)}) = \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ I' \subset I \text{ endl.}}} (\overline{E''_n} \cap \bigcap_{i \in I'} (X \setminus O_i)) \overset{(*)}{\subset} (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{E''_n}) \cap \underbrace{(\bigcap_{i \in I} (X \setminus O_i))}_{= \emptyset} = \emptyset$$

((*) Ist $x \in \bigcap_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ I' \subset I \text{ endl.}}} (\overline{E''_n} \cap \bigcap_{i \in I'} (X \setminus O_i))$, $n \in \mathbb{N}$, $i \in I$, so ist $I' := \{i\}$ eine endliche Teilmenge von I, und es gilt $x \in \overline{E''_n} \cap (X \setminus O_i)$)

folgt ein Widerspruch. Also gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine endliche Teilmenge I' von I mit $E''_n \subset \bigcup_{i \in I'} O_i$. qed.

2) $\Longrightarrow$ 1): Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X, also $\underline{E} = (\{E_n \,/\, n \in \mathbb{N}\})$ ein beliebiger Elementarfilter auf X. Nach Voraussetzung existiert eine Teilfolge $(x_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$, die die Bedingung (2) erfüllt.

Beh.: Der zur Teilfolge gehörende Elementarfilter $\underline{E}'$ ist häufungspunktstabil.

Bew. (indirekt): Angenommen, es existiert ein Filter $\underline{F} \leq \underline{E}'$ ohne Häufungspunkt. Dann gilt $\bigcap_{F \in \underline{F}} \overline{F} = \emptyset$, also $\bigcup_{F \in \underline{F}} (X \setminus \overline{F}) = X$. Zu der offenen Überdeckung $(X \setminus \overline{F})_{F \in \underline{F}}$ gibt es nach Voraussetzung $F_1, \ldots F_n \in \underline{F}$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $E'_m \subset \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus \overline{F}_i)$. Weil $\underline{F}$ ein Filter ist, gilt $F := \bigcap_{i=1}^{n} F_i \in \underline{F}$. Dann ist $\overline{F} = \overline{\bigcap_{i=1,\ldots,n} F_i} \subset \bigcap_{i=1,\ldots,n} \overline{F}_i$, also $\bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus \overline{F}_i) \subset (X \setminus \overline{F})$. $E'_m \subset \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus \overline{F}_i)$ impliziert $E'_m \subset (X \setminus \overline{F})$. Weil $\underline{F}$ feiner ist als $\underline{E}'$, gehört E'_m zu $\underline{F}$. Es folgt $(X \setminus \overline{F}) \in \underline{F}$. Das ist wegen $F \in \underline{F}$ und $(X \setminus \overline{F}) \cap F = \emptyset$ ein Widerspruch zur Filtereigenschaft. Also gilt die Behauptung.

Diese Charakterisierung motiviert uns zu folgender Definition:

4.3.7. Definition: Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum $(X,\underline{X})$ heißt quasikonvergent, wenn zu jeder offenen Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von X eine endliche Teilmenge I' von I existiert mit

$$x_n \in \bigcup_{i \in I'} O_i \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$

4.3.8. Bemerkungen: (1) Für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(X,\underline{X})$ gilt:

$(x_n)_n$ konvergent $\Longrightarrow$ $(x_n)_n$ quasikonvergent $\Longrightarrow$ $(x_n)_n$ hat einen Häufungspunkt.

(2) Ein topologischer Raum ist genau dann filterkompakt, wenn jede Folge eine quasikonvergente Teilfolge besitzt.

4.3.9. Satz: (1) Das stetige Bild eines filterkompakten Raumes ist filterkompakt.

(2) Ein abgeschlossener Unterraum eines filterkompakten Raumes ist filterkompakt.

4.3.10. Satz: Es sei $(X,\underline{X})$ ein topologischer Raum. Besitzt jede quasikonvergente Folge in X eine Teilfolge mit höchstens endlich vielen Häufungspunkten, so sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist folgenkompakt,

2) $(X,\underline{X})$ ist filterkompakt.

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): klar.

2) $\Longrightarrow$ 1)(indirekt): Angenommen, es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Weil X filterkompakt ist, existiert eine quasikonvergente Teilfolge $(x_{(0,n)})_{n \in \mathbb{N}}$. O.B.d.A. habe $(x_{(0,n)})_{n \in \mathbb{N}}$ höchstens endlich viele Häufungspunkte.

Beh.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(x_{(0,n)})_{n \in \mathbb{N}}$ hat mindestens n Häufungspunkte.

Bew.(induktiv): Da jeder filterkompakte Raum abzählbar kompakt ist, gilt die Behauptung für n = 1.

I.A.: $(x_{(o,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt mindestens n Häufungspunkte.

I.E.: $(x_{(o,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt mindestens n+1 Häufungspunkte.

Wir nehmen an, daß $(x_{(o,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ genau n Häufungspunkte besitzt. Es bezeichne $H:=\{y_1,\ldots,y_n\}$ die Menge der Häufungspunkte. Weil X ein T_2-Raum ist, finden wir zu i, $j\in\{1,\ldots,n\}$ mit $i\neq j$ Umgebungen $U_{y_i}\in\mathring{\underline{U}}(y_i)$ und $U_{y_j}\in\mathring{\underline{U}}(y_j)$ mit $U_{y_i}\cap U_{y_j}=\emptyset$. Für alle $i\in\{1,\ldots,n\}$ gibt es - weil y_i Häufungspunkt von $(x_{(o,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist - eine Teilfolge $(x_{(i,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_{(o,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{(i,n)}\in U_{y_i}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt, konvergieren insbesondere die Folgen $(x_{(i,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gegen y_i (i = 1,...,n). Folglich gibt es für alle $i\in\{1,\ldots,n\}$ Umgebungen $V_{y_i}\in\mathring{\underline{U}}(y_i)$, die unendlich viele Glieder der Folge $(x_{(i,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht enthalten. Wir setzen $O_{y_i}:=U_{y_i}\cap V_{y_i}$ für alle $i\in\{1,\ldots,n\}$. Dann gilt $O_{y_i}\cap O_{y_j}=\emptyset$ für $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ mit $i\neq j$. Für jedes $i\in\{1,\ldots,n\}$ enthält O_{y_i} unendlich viele $x_{(i,n)}$ nicht (wegen $O_{y_i}\subset V_{y_i}$). Weil $y\in X\setminus H$ kein Häufungspunkt von $(x_{(o,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist, finden wir zu jedem $y\in X\setminus H$ eine Umgebung $O_y\in\mathring{\underline{U}}(y)$, die höchstens endlich viele $x_{(o,n)}$ enthält. Dann ist $(O_y)_{y\in X}$ eine offene Überdeckung von X. Da die Folge $(x_{(o,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ quasikonvergent ist, existiert eine endliche Teilmenge E von X derart, daß in $\bigcup_{y\in E}O_y$ fast alle $x_{(o,n)}$ liegen. Da in $\bigcup_{y\in E\setminus H}O_y$ höchstens endlich viele Folgenglieder liegen, müssen in $\bigcup_{y\in E\cap H}O_y$ fast alle $x_{(o,n)}$ liegen. Daraus folgt insbesondere $U_{y_1}\cap\bigcup_{y\in E\cap H}O_y\neq\emptyset$. Folglich existiert ein $i\in\{2,\ldots,n\}$ mit $U_{y_1}\cap U_{y_i}\neq\emptyset$. Das widerspricht jedoch der Wahl von U_{y_i}. Also war die Annahme, daß $(x_{(o,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ genau n Häufungspunkte besitzt, falsch. Folglich besitzt $(x_{(o,n)})_{n\in\mathbb{N}}$ abzählbar unendlich viele Häufungspunkte. Das ist aber ein Widerspruch zur General-Prämisse. Daher muß die Annahme, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt, falsch sein.

Wir geben nun eine Bedingung an, unter der die Begriffe abzählbar kompakt und filterkompakt äquivalent sind.

4.3.11. Definition: Nach Tanaka [Ta] heißt ein topologischer $(X,\underline{X})$ C_o-Raum, wenn jede Folge in X, deren Abschluß abzählbar kompakt ist, eine

Teilfolge besitzt, deren Abschluß quasikompakt ist.

4.3.12. Bemerkung: Jeder k_0-Raum ist C_0-Raum. (Siehe auch 1.2.18.(3))

4.3.13. Satz: Für einen C_0-Raum $(X,\underline{X})$ sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist abzählbar kompakt,

2) $(X,\underline{X})$ ist filterkompakt.

Beweis: 2) $\Longrightarrow$ 1): klar

1) $\Longrightarrow$ 2): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Weil X abzählbar kompakt ist, ist auch $\overline{\{x_n \,/\, n\in\mathbb{N}\}}$ abzählbar kompakt. Nach Voraussetzung existiert eine Teilfolge $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ derart, daß $\overline{\{x_{j_n} \,/\, n\in\mathbb{N}\}}$ quasikompakt ist. Trivialerweise ist dann $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ quasikonvergent.

4.3.14. Definitionen (Bernstein [Be]): $(X,\underline{X})$ sei ein topologischer Raum.

1) Es sei $\underline{U}$ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$.

   (a) Ein Punkt $x\in X$ heißt $\underline{U}$-Limes einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X, wenn für jede Umgebung V von x gilt:

   $$\{n \,/\, n\in\mathbb{N},\ x_n\in V\}\in\underline{U}\ .$$

   (b) $(X,\underline{X})$ heißt $\underline{U}$-kompakt, wenn jede Folge in X einen $\underline{U}$-Limes besitz

2) $(X,\underline{X})$ heißt ultrakompakt, wenn $(X,\underline{X})$ $\underline{U}$-kompakt ist für jeden Ultrafilter $\underline{U}$ auf $\mathbb{N}$.

4.3.15. Satz: Für einen topologischen Raum $(X,\underline{X})$ sind äquivalent:

1) $(X,\underline{X})$ ist ultrakompakt,

2) Jede Folge in X ist quasikonvergent.

Beweis: 1) $\Longrightarrow$ 2): Nehmen wir an, daß es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gibt, die nicht quasikonvergent ist. Dann gibt es eine offene Überdeckung $(O_i)_{i\in I}$ so, daß in $\bigcup_{i\in I'} O_i$ unendlich viele x_n nicht liegen für alle endlichen Teilmengen I' von I. Wir definieren $\underline{I} = \{I' \,/\, I'\subset I,\ I' \text{ endlich}\}$ und $F_{I'} := \{n \,/\, n\in\mathbb{N},\ x_n\notin$

$\bigcup_{i\in I'} O_i\}$ für alle $I'\in \underline{I}$. Dann ist $\underline{B}:=\{F_{I'} / I'\in \underline{I}\}$ Filterbasis auf $\mathbb{N}$ ($\underline{B}\neq\emptyset$, $\emptyset\notin \underline{B}$ sind trivialerweise erfüllt; außerdem gilt $F_{I'}\cap F_{I''}\supset F_{I'\cup I''}$). Zu dem von $\underline{B}$ erzeugten Filter $\underline{F}$ existiert ein feinerer Ultrafilter $\underline{U}$. Nach Voraussetzung hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen $\underline{U}$-Limes. Also existiert ein $x\in X$, so daß für alle $V\in \underline{U}(x)$ gilt $U_V:=\{n / n\in\mathbb{N}, x_n\in V\}\in\underline{U}$. Da $(O_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von X ist, gibt es ein $i\in I$ mit $x\in O_i$. Für $I':=\{i\}\in\underline{I}$ gilt dann $F_{I'}\in\underline{B}\subset\underline{U}$. Wegen $U_{O_i}\in\underline{U}$ und $U_{O_i}\cap F_{I'}=\emptyset$ erhalten wir einen Widerspruch. Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quasikonvergent.

2) $\Longrightarrow$ 1): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $\underline{U}$ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Zu zeigen: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt einen $\underline{U}$-Limes. Wir nehmen an, daß kein $x\in X$ $\underline{U}$-Limes von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Dann finden wir zu jedem $x\in X$ eine Umgebung $O_x\in\mathring{\underline{U}}(x)$ mit $A_x:=\{n / x_n\in O_x\}\notin\underline{U}$. Weil $(O_x)_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von X ist und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung quasikonvergent ist, gibt es eine endliche Teilmenge E von X mit $x_n\in\bigcup_{x\in E} O_x$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$. Dann existiert ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}\setminus\{1,\dots,n_0\}\subset\bigcup_{x\in E} A_x$. Für $A_0:=\{1,\dots,n_0\}$ gilt $A_0\cup\bigcup_{x\in E} A_x=\mathbb{N}\in\underline{U}$.
1. Fall: $A_0\in\underline{U}$. Dann ist $\underline{U}$ ein Hauptfilter und somit X $\underline{U}$-kompakt. Widerspruch!
2. Fall: $A_0\notin\underline{U}$. Weil $\underline{U}$ ein Ultrafilter ist, folgt $\bigcup_{x\in E} A_x\in\underline{U}$. Dann existiert ein $x\in E$ mit $A_x\in\underline{U}$. Widerspruch!
Also war die Annahme, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen $\underline{U}$-Limes besitzt, falsch.

4.3.16. Korollar: Jeder ultrakompakte Raum ist filterkompakt.

4.3.17. Beispiel: Ein filterkompakter Raum braucht nicht ultrakompakt zu sein. $\gamma\mathbb{N}$ bezeichne die Wallman-Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$. Weil $\mathbb{N}$ normal ist, gilt $\gamma\mathbb{N}\cong\beta\mathbb{N}$ (= Stone-Cech-Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$). $\hat{\mathbb{N}}:=\{\hat{n} / n\in\mathbb{N}, \hat{n}$ Hauptultrafilter mit der Basis $\{\{n\}\}\}$. Wegen $\mathrm{Card}\,\gamma\mathbb{N}=2^c$ und $\mathrm{Card}\,\hat{\mathbb{N}}=\aleph_0$ existiert ein Ultrafilter $\underline{U}_0$ auf $\mathbb{N}$ mit $\underline{U}_0\in\gamma\mathbb{N}\setminus\hat{\mathbb{N}}$. (Man wähle etwa den zum Filter $\{F / F\subset\mathbb{N}, \mathbb{N}\setminus F$ endlich$\}$ gehörenden feineren Ultrafilter.)
Wir setzen $X:=\gamma\mathbb{N}\setminus\{\underline{U}_0\}$.
(1) X (versehen mit der Spurtopologie) ist filterkompakt:

Sei $(\underline{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. O.B.d.A. gelte $\underline{U}_n \neq \underline{U}_m$ für $n \neq m$. Da $\underline{U}_o$ nicht Limes von $(\underline{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist (sonst gäbe es mit $A := \overline{\{\underline{U}_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}}^{T_2} \setminus \{\underline{U}_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ $\{\underline{U}_o\}$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\beta\mathbb{N}$, die abzählbar unendlich ist), existiert eine offene Umgebung O von $\underline{U}_o$ in $\gamma\mathbb{N}$, die unendlich viele $\underline{U}_n$ nicht enthält. Also gibt es eine streng monotone Abbildung $j: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $B := \{\underline{U}_{j_n} \,/\, n \in \mathbb{N}\} \subset \gamma\mathbb{N} \setminus O$.

Beh.: $(\underline{U}_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist quasikonvergent (in X).

Bew.: Seien O_i offene Mengen in $\gamma\mathbb{N}$, so daß für $O_i' := O_i \cap X$ gilt $\bigcup O_i' = X$. Setzen wir $\hat{I} := I \cup \{\omega\}$ und $O_\omega := O$, dann ist $(O_i)_{i \in \hat{I}}$ eine offene Überdeckung von $\gamma\mathbb{N}$. Weil $\gamma\mathbb{N}$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge I' von $\hat{I}$ mit $\bigcup_{i \in I'} O_i = \gamma\mathbb{N}$. $B \cap O = \emptyset$ impliziert $B \subset \bigcup_{i \in I \cap I'} O_i$, und wegen $\underline{U}_o \notin B$ gilt sogar $B \subset \bigcup_{i \in I \cap I'} O_i'$. qed.

(2) X ist nicht $\underline{U}_o$-kompakt (also auch nicht ultrakompakt):

Wir nehmen an, daß X $\underline{U}_o$-kompakt ist. Dann existiert zu der Folge $(\hat{n})_{n \in \mathbb{N}}$ in X ein $\underline{U}_o$-Limes $\underline{U} \in X$.

Beh.: $\underline{U} \subset \underline{U}_o$.

Bew.: Angenommen, es gilt $\underline{U} \not\subset \underline{U}_o$. Dann existiert ein $U \in \underline{U}$ mit $U \notin \underline{U}_o$. Weil $\mathbb{N}$ diskret ist, ist $\mathbb{N} \setminus U$ abgeschlossen in $\mathbb{N}$. Also ist $\{\underline{F} \in \gamma\mathbb{N} \,/\, \mathbb{N} \setminus U \in \underline{F}\}$ abgeschlossen in $\gamma\mathbb{N}$. Wegen $U \in \underline{U}$ gilt $\mathbb{N} \setminus U \notin \underline{U}$, also $\underline{U} \in O_U := \gamma\mathbb{N} \setminus \{\underline{F} \in \gamma\mathbb{N} \,/\, \mathbb{N} \setminus U \in \underline{F}\}$. $U \notin \underline{U}_o$ impliziert - da $\underline{U}_o$ Ultrafilter ist - $\mathbb{N} \setminus U \in \underline{U}_o$. Es folgt $\underline{U}_o \notin O_U$. Also ist O_U eine offene Umgebung von $\underline{U}$ in X. Weil $\underline{U}$ $\underline{U}_o$-Limes von $(\hat{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist, gilt $U' := \{n \in \mathbb{N} \,/\, \hat{n} \in O_U\} \in \underline{U}_o$. Wegen $U' = U$ ($n \notin U' \iff \hat{n} \notin O_U \iff \mathbb{N} \setminus U \in \hat{n} \iff n \notin U$) erhalten wir einen Widerspruch zu $U \notin \underline{U}_o$.

Aus $\underline{U} \subset \underline{U}_o$ folgt nun - da $\underline{U}$ Ultrafilter ist - $\underline{U} = \underline{U}_o$. Das steht aber im Widerspruch zu: $\underline{U} \in X \wedge \underline{U}_o \notin X$. Daher muß die Annahme, daß X $\underline{U}_o$-kompakt ist, falsch sein.

s.o.B. Bemerkung: Genaugenommen wird in 4.3.17 gezeigt, daß zu jedem Ultrafilter $\underline{U}$ auf $\mathbb{N}$, der kein Hauptfilter ist, ein filterkompakter Raum $X_{\underline{U}}$ existiert, der nicht $\underline{U}$-kompakt ist.

4.2.19. Satz: (1) Das Produkt eines filterkompakten Raumes mit einem abzählbar kompakten Raum ist abzählbar kompakt.

(2) Das Produkt eines folgenkompakten Raumes mit einem filterkompakten Raum ist filterkompakt.

(3) Das Produkt eines quasikompakten Raumes mit einem filterkompakten Raum ist filterkompakt.

Beweis: Zu (1): Es seien $(X,\underline{X})$ ein filterkompakter und $(Y,\underline{Y})$ ein abzählbar kompakter Raum. Ist $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X\times Y$, so besitzt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X eine quasikonvergente Teilfolge $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Fall: Es existiert ein $x_o\in X$, so daß für unendlich viele $n\in\mathbb{N}$ gilt $x_{j_n} = x_o$. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{k_{j_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_{k_{j_n}} = x_o$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Weil Y abzählbar kompakt ist, besitzt die Folge $(y_{k_{j_n}})_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $y_o\in Y$. Trivialerweise ist dann (x_o,y_o) Häufungspunkt von $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Fall: Höchstens endlich viele Glieder der Folge $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sind identisch. O.B.d.A. seien alle Folgenglieder paarweise verschieden. Weil Y abzählbar kompakt ist, besitzt die Folge $(y_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $y_o\in Y$.

Beh.: $((x_{j_n},y_{j_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt einen Häufungspunkt.

Bew.: Wir nehmen an, daß $((x_{j_n},y_{j_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ keinen Häufungspunkt besitzt. Dann existiert zu jedem $x\in X$ eine Umgebung $O_{xy_o}\in \mathring{\underline{U}}((x,y_o))$, die höchstens endlich viele Folgenglieder (x_{j_n},y_{j_n}) enthält. $(x,y_o)\in O_{xy_o}$ impliziert die Existenz von $O_x\in\mathring{\underline{U}}(x)$ und $O_y^x\in\mathring{\underline{U}}(y_o)$ mit $(x,y_o)\in O_x\times O_y^x\subset O_{xy_o}$. Wir erhalten eine offene Überdeckung $(O_x)_{x\in X}$ von X. Weil $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ quasikonvergent ist, finden wir eine endliche Teilmenge E von X, so daß in $\bigcup_{x\in E} O_x$ fast alle Folgenglieder x_{j_n} liegen. Setzen wir $O_{y_o} := \bigcap_{x\in E} O_y^x$ und $O := \bigcup_{x\in E}(O_x\times O_{y_o})$, dann gilt $O\subset\bigcup_{x\in E} O_{xy_o}$. Da in O_{y_o} unendlich viele y_{j_n} liegen, müssen in O - und damit auch in $\bigcup_{x\in E} O_{xy_o}$ - unendlich viele (x_{j_n},y_{j_n}) liegen. Dieser Widerspruch impliziert, daß $((x_{j_n},y_{j_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ - und damit auch $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ - einen Häufungspunkt besitzt. qed.

Zu (2): Es seien $(X,\underline{X})$ ein folgenkompakter und $(Y,\underline{Y})$ ein filterkompakter Raum.

Ist $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X\times Y$, so finden wir eine Teilfolge $((x_{j_n},y_{j_n}))_{n\in\mathbb{N}}$, so daß die Folge $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ in X konvergiert und die Folge $(y_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ in Y quasikonvergent ist. $x_o\in X$ bezeichne den Limes von $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Beh.: $((x_{j_n},y_{j_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ ist quasikonvergent.

Bew.: Sei $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $X\times Y$. Dann existiert für alle $y\in Y$ ein $i_y\in I$ mit $(x_o,y)\in O_{i_y}$. Also gibt es zu jedem $y\in Y$ ein $O_y\in \mathring{\underline{U}}(y)$ und ein $O_x^y\in \mathring{\underline{U}}(x_o)$ mit $(x_o,y)\in O_x^y\times O_y\subset O_{i_y}$. Dann ist $(O_y)_{y\in Y}$ eine offene Überdekkung von Y. Weil $(y_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ quasikonvergent ist, finden wir eine endliche Teilmenge E von Y derart, daß in $\bigcup_{y\in E} O_y$ fast alle y_{j_n} liegen. Setzen wir $O_x:=\bigcap_{y\in E} O_x^y$ und $O:=\bigcup_{y\in E}(O_x\times O_y)$, dann gilt $O\subset\bigcup_{y\in E} O_{i_y}$. Da O fast alle Folgenglieder (x_{j_n},y_{j_n}) enthält, ist alles gezeigt.

Zu (3): Es seien $(X,\underline{X})$ ein quasikompakter und $(Y,\underline{Y})$ ein filterkompakter Raum. Sei $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $X\times Y$. Weil Y filterkompakt ist, existiert eine quasikonvergente Teilfolge $(y_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beh.: $((x_{j_n},y_{j_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ ist quasikonvergent.

Bew.: Sei $\mathcal{U}=\{U_\alpha \;/\; 1\le\alpha<\tau\}$ eine offene Überdeckung von $X\times Y$ (τ Ordinalzahl). Wir setzen $I:=\{\alpha \;/\; 1\le\alpha<\tau\}$ und $\underline{E}:=\{E \;/\; E\subset I \text{ endlich}\}$. $\underline{E}$ - versehen mit der Relation $E<E':\Longleftrightarrow E\subset E'$ - ist eine gerichtete Menge.

Für jedes $E\in\underline{E}$ definieren wir

$$H_E:=\{y \;/\; y\in Y, \text{ es ex. } V\in\mathring{\underline{U}}(y) \text{ mit } X\times V\subset\bigcup_{\alpha\in E} U\}.$$

Es gilt:

(a) H_E ist offen für alle $E\in\underline{E}$.

(b) $E<E' \Longrightarrow H_E\subset H_{E'}$.

(c) $(H_E)_{E\in\underline{E}}$ ist eine Überdeckung von Y.

Zu (a): Für $y\in H_E$ existiert ein $V\in\mathring{\underline{U}}(y)$ mit $X\times V\subset\bigcup_{\alpha\in E} U_\alpha$. Es folgt $V\subset H_E$.

Zu (b): trivial.

Zu (c): Sei $y\in Y$. Beh.: Es existiert ein $E\in\underline{E}$ mit $X\times\{y\}\subset\bigcup_{\alpha\in E} U_\alpha$.

Bew.: Wir nehmen an, daß für alle $E\in\underline{E}$ $X\times\{y\}\not\subset\bigcup_{\alpha\in E} U_\alpha$ gilt. Dann finden wir zu jedem $E\in\underline{E}$ ein $x_E\in X$ mit $(x_E,y)\notin\bigcup_{\alpha\in E} U_\alpha$. Weil $\underline{E}$ gerichtet ist, ist $(x_E)_{E\in\underline{E}}$ ein Netz in X. Da X quasikompakt ist, existiert zu diesem Netz ein Häufungs-

punkt $x_o \in X$; d.h., zu jeder Umgebung V von x_o und jedem $E \in \underline{E}$ gibt es ein $E' \in \underline{E}$ mit $E' \supset E$ und $x_{E'} \in V$. Weil $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von $X \times Y$ ist, existiert ein $\alpha \in I$ mit $(x_o, y) \in U_\alpha$. Also finden wir Umgebungen $V_x \in \mathring{\underline{U}}(x_o)$ und $V_y \in \mathring{\underline{U}}(y)$ mit $(x_o, y) \in V_x \times V_y \subset U_\alpha$. Wir setzen $E := \{\alpha\} \in \underline{E}$. Dann existiert ein $E' \in \underline{E}$ mit $\alpha \in E \subset E'$ und $x_{E'} \in V_x$. Hieraus folgt $(x_{E'}, y) \in V_x \times V_y \subset U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha' \in E'} U_{\alpha'}$. Das ist ein Widerspruch zur Wahl von $x_{E'}$. Also gibt es ein $E \in \underline{E}$ mit $X \times \{y\} \subset \bigcup_{\alpha \in E} U_\alpha$.

Zu zeigen: $y \in H_E$. Weil $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von $X \times Y$ ist, existieren zu jedem $x \in X$ Umgebungen $W_x \in \mathring{\underline{U}}(x)$ und $W_y^x \in \mathring{\underline{U}}(y)$ mit $(x,y) \in W_x \times W_y^x \subset \bigcup_{\alpha \in E} U_\alpha$. Dann ist $(W_x)_{x \in X}$ eine offene Überdeckung von X. Weil X quasikompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge B von X mit $\bigcup_{x \in B} W_x = X$. Wir setzen $W := \bigcap_{x \in B} W_y^x$. Es folgt $X \times \{y\} \subset X \times W \subset \bigcup_{x \in B} W_x \times W_y^x \subset \bigcup_{x \in X} (W_x \times W_y^x) \subset \bigcup_{\alpha \in E} U_\alpha$, also $y \in H_E$. Damit ist (c) bewiesen.

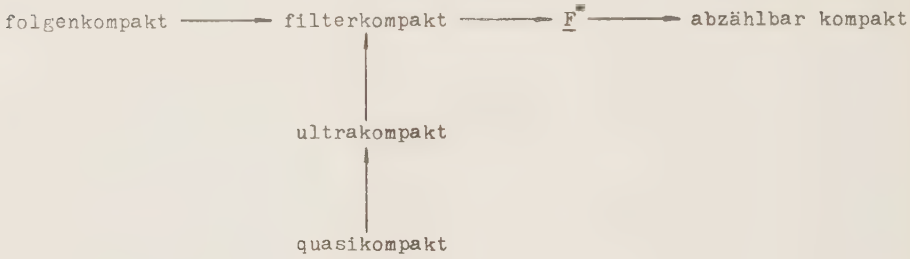
Zu der offenen Überdeckung $(H_E)_{E \in \underline{E}}$ von Y existieren nun - da $(y_{j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ quasikonvergent ist - ein $n_o \in \mathbb{N}$ und $E_1, \ldots, E_k \in \underline{E}$, so daß $y_{j_n} \in \bigcup_{i=1}^{k} H_{E_i}$ gilt für alle $n \geq n_o$. Setzen wir $E := \bigcup_{i=1}^{k} E_i \in \underline{E}$, so folgt (nach (b)) $H_E \supset \bigcup_{i=1}^{k} H_{E_i}$. Ist $n \geq n_o$, so existiert ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $y_{j_n} \in H_{E_i}$. Es folgt $(x_{j_n}, y_{j_n}) \in X \times \{y_{j_n}\} \subset \bigcup_{\alpha \in E_i} U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in E} U_\alpha$. Also ist $((x_{j_n}, y_{j_n}))_{n \in \mathbb{N}}$ quasikonvergent. qed.

4.3.20. Bemerkungen: (1) Da das Produkt von zwei abzählbar kompakten Räumen nicht abzählbar kompakt zu sein braucht (s. Novak [N]), folgt aus 4.3.19.(1), daß ein abzählbar kompakter Raum nicht filterkompakt zu sein braucht. Aus 4.3.19.(1) folgt außerdem, daß die vollständig regulären filterkompakten Räume eine Zwischenklasse zwischen den von Frolik [Fro1], [Fro2] eingeführten Klassen $\underline{P}_F$ und $\underline{C}$ bilden.

(2) 4.3.19.(3) und 4.3.9.(2) implizieren, daß die Unterkategorie der vollständig regulären filterkompakten Räume eine 'left-fitting-Kategorie' ([He2]) ist.

(3) Fügt man zur Klasse der filterkompakten Räume alle abgeschlossenen Unterräume von endlichen Produkten von filterkompakten Räumen hinzu, so erhält man eine Unterklasse $\underline{F}^*$ der Klasse der abzählbar kompakten

Räume, die abgeschlossen bez. Bildung von endlichen Produkten und abgeschlo
senen Unterräumen ist und sowohl die Klasse der quasikompakten als auch die
Klasse der folgenkompakten Räume umfaßt.



Literaturverzeichnis

Ar Arhangel'skii, A.: On a class of spaces containing all metric and all locally bicompact spaces. Soviet Math. Dokl. 4 (1963), 1051-1055.

Au Aull, C. E.: A certain class of topological spaces. Prace Mat. 11 (1967), 49-53.

Be Bernstein, A. R.: A new kind of compactness for topological spaces. Fund. Math. 66 (1970), 185-193.

Ch Chiba, T.: On q-spaces. Proc. Japan Acad. 45 (1969), 453-456.

Fra Franklin, S. P.: Spaces in which sequences suffice. Fund. Math. 57 (1965), 107-115.

Fro 1 Frolík, Z.: The topological product of countably compact spaces. Czech. Math. J. 10 (1960), 329-383.

2 - - : The topological product of two pseudocompact spaces. Czech. Math. J. 10 (1960), 339-348.

G J Gillman, L. und Jerison, M.: Rings of continuous functions. Van Nostrand, Princeton, 1960.

He 1 Herrlich, H.: Limit-oprators and topological coreflections. Trans. Amer. Math. Soc. 146 (1969), 203-210.

2 - - : Categorical topology. General Topology and Appl. 1 (1971), 1-15.

3 - - : Topological structures. Math. Centre Tract 52 (1974), 59-122.

K Katětov, M.: Über H-abgeschlossene und bikompakte Räume. Čas. pest. mat. 69 (1940), 36-49.

Ma Marny, T.: Rechts-Bikategoriestrukturen in topologischen Kategorien. Dissertation FU Berlin 1973.

Mi 1 Michael, E.: $\aleph_0$-spaces. J. Math. Mech. 15 (1968), 983-1002.

2 - - : A note on closed maps and compact sets. Israel J. Math. 2 (1964), 173-176.

N Novák, J.: On the cartesian product of two compact spaces. Fund. Math. 40 (1953), 106-112.

Pr Preuß, G.: Allgemeine Topologie. Berlin-Heidelberg-New York: Springer (1972).

S W Sion, M. und Willmott, R. C.: Hausdorff measure on abstract spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1966), 275-309.

Si Siwiec, F.: Generalizations of the first axiom of countability. Rocky Mountain J. Math. 5 (1975), 1-60.

T Tanaka, Y.: On products of quasi-perfect maps. Proc. Japan Acad. 46 (1970), 1070-1073.

Lebenslauf

Am 16. September 1949 wurde ich als Sohn des Maschinenschlossers Günter Pohl und dessen Ehefrau Marianne, geb. Warmer, in Berlin geboren. Von 1956 bis 1962 besuchte ich die 3. Grundschule in Berlin und wurde dann auf die Fontane-Schule in Berlin-Tiergarten umgeschult, eine Oberschule technischen Zweiges. Diese verließ ich im Jahre 1966 mit dem Zeugnis der mittleren Reife. Anschließend absolvierte ich ein zweijähriges Praktikum bei der Firma Siemens-Schuckertwerke AG. 1968 setzte ich meine Berufsausbildung mit dem Studium der Fachrichtung Maschinenbau an der staatlichen Ingenieurakademie Beuth Berlin fort. Nach zwei Semestern wechselte ich zur Fachrichtung Verfahrenstechnik über, in der ich 1971 die Ingenieurprüfung ablegte.

Seit dem Sommersemester 1971 studiere ich an der Freien Universität Berlin Mathematik mit dem Nebenfach Physik. Die Diplomvorprüfung bestand ich im Mai 1973, die Diplomhauptprüfung im Februar 1976. In meiner Diplomarbeit habe ich das Thema " Transitive Quasi-Uniformitäten und Topologien" behandelt. Seit März 1976 bin ich Mitarbeiter des Forschungsprojektschwerpunktes "Kategorielle Topologie" unter Leitung von Prof. Dr. G. Preuß. Meine Lehrer in Mathematik waren die Professoren Begehr, Behrends, Güntzler, Kleinert, Kurotschka, Letzner, Pachale, Preuß, Scheerer, Schendel, Schmidt, Stöhr, Töpfer und die Assistenzprofessoren Marny und Spiegel, in Physik die Professoren Eichler, Kramer, Quitmann, Schotte und Wilking.

Die vorliegende Dissertation entstand unter Leitung von Herrn Prof. Dr. G. Preuß. Die Arbeit wurde durch ein Promotionsstipendium der Freien Universität Berlin gefördert.